Isométries du plan euclidien (h)

On rappelle que les isométries du plan sont classifiées en :

(1) les *déplacements*, qui respectent l'orientation : les translations et les rotations.

(2) les *antidéplacements*, qui changent l'orientation : les réflexions (symétries de droite) et les symétries glissées (composées d'une réflexion et d'une translation de vecteur parallèle à l'axe de la réflexion).

Exercice h.1 (1) Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites parallèles, s_1 et s_2 les réflexions par rapport à ces droites. Qu'est-ce que l'isométrie $t := s_2 \circ s_1$? Donnez ses éléments caractéristiques.

(2) Mêmes questions si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux droites sécantes.

Exercice h.2 Soit ABC un triangle, I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[AC]$, H le pied de la hauteur issue de A, et O le point d'intersection de (IJ) avec (AH).

Pour chaque point M du plan, on considère son image M^* par la symétrie centrale de centre O, puis l'image M' de M^* par la réflexion d'axe (BC). On souhaite étudier l'isométrie s ainsi définie par $s(M) = M'$.

(1) L'isométrie s préserve-t-elle l'orientation ?

(2) A-t-elle des points fixes ? (*Indic : soit M un point fixe. Montrez que la médiatrice de $[MM^*]$ doit d'une part contenir O, d'autre part être égale à (BC). Aboutir à une contradiction.*)

(3) Quelle est la nature de s ? (*Utilisez ce que l'on sait sur la classification des isométries.*)

(4) On écrit s sous la forme $s = t_{\vec{v}} \circ s_{\mathcal{D}}$ où $\vec{v}$ et $\mathcal{D}$ sont à déterminer (notations du cours, déf. 3.6.2 du paragraphe sur les isométries). Comment trouver $\vec{v}$?

(*Indic : comparez $t_{\vec{v}} \circ s_{\mathcal{D}}$ et $s_{\mathcal{D}} \circ t_{\vec{v}}$, et calculez $s \circ s$.*)

(5) Comment ensuite déterminer $\mathcal{D}$?

Exercice h.3 Soit $ABCD$ un parallélogramme. On construit, à l'extérieur de $ABCD$, les triangles équilatéraux ADP et ABQ.

(1) Montrez que PQC est équilatéral.

(2) On considère l'isométrie qui transforme le triangle PDC en CBQ. Quelle est sa nature ? Expliquez comment construire ses éléments caractéristiques, en donnant les étapes de la construction.

(*Indic : Donnez l'isométrie comme composée de deux isométries r et t. Ensuite construisez le point O intersection des diagonales de $ABCD$ et le point A' symétrique de A par rapport à P, et :*

- *la droite $\mathcal{D}_1$ parallèle à (DP) passant par B,*
- *la droite $\mathcal{D}_2$ parallèle à (DA') passant par B,*
- *la droite $\mathcal{D}_3$ parallèle à (DP) passant par O.*

Décomposez r et t en vous aidant de ces éléments, et concluez.)

Exercice h.4 Le phénomène qui se produit dans l'exercice h.2 est général :

(1) Montrez que la composée d'une symétrie centrale et d'une réflexion est une symétrie glissée.

(2) Montrez qu'une symétrie glissée est la composée d'une symétrie centrale et d'une réflexion.

Cas d'égalité des triangles (i)

Étant donné un triangle ABC on note α, β, γ les angles du triangle aux sommets A, B, C. Voilà les trois « cas d'égalité des triangles » classiques :

- **Premier cas d'égalité des triangles (CAC) :** Si deux triangles ont deux côtés égaux et les angles entre ces côtés égaux, alors ils sont isométriques. (Si deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont tels que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $\alpha = \alpha'$ alors ils sont isométriques.)
- **Deuxième cas d'égalité des triangles (ACA) :** Si deux triangles ont deux angles égaux et les côtés entre ces angles égaux, alors ils sont isométriques. (Si deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont tels que $AB = A'B'$, $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$ alors ils sont isométriques.)
- **Troisième cas d'égalité des triangles (CCC) :** Si deux triangles ont tous leurs côtés égaux, alors ils sont isométriques. (Si deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont tels que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $BC = B'C'$ alors ils sont isométriques.)

Exercice i.1 Le premier cas d'égalité a été admis dans le cours, en tant que l'un des axiomes d'Euclide. Dans cet exercice on démontre le deuxième cas d'égalité. Soient deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que $AB = A'B'$, $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$. On doit montrer qu'ils sont isométriques. On appelle D l'unique point sur la demi-droite $[AC)$ tel que $AD = A'C'$.

(1) Montrez que les triangles ABD et $A'B'C'$ sont isométriques.

(2) Déduisez-en que D appartient à la demi-droite $[BC)$ (utilisez l'axiome (Ang1)).

(3) Déduisez-en que $D = C$, puis que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques.

Exercice i.2 Dans cet exercice on se pose la question de savoir s'il existe un « cas d'égalité » pour les polygones convexes à n côtés, semblable au troisième cas d'égalité des triangles (CCC). Deux tels polygones sont *isométriques* s'il existe une isométrie qui transforme le premier en le deuxième (nous admettons que c'est la même chose que de dire que : les côtés correspondants successifs, dans un ordre de parcours fixé, sont égaux, et les angles successifs sont aussi égaux).

(1) Peut-on démontrer un cas d'égalité semblable pour les quadrilatères ? En d'autres termes : étant donnés deux quadrilatères convexes $ABCD$ et $A'B'C'D'$ dont les côtés correspondants sont égaux ($AB = A'B'$, $BC = B'C'$, etc), sont-ils toujours isométriques ?

(2) Fixons un entier quelconque $n \geq 4$. Peut-on démontrer un cas d'égalité semblable pour les polygones convexes à n côtés ?

(3) Démontrez le résultat suivant (cas d'égalité pour les quadrilatères). Soient deux quadrilatères convexes $ABCD$ et $A'B'C'D'$ dont les côtés correspondants sont égaux ($AB = A'B'$, $BC = B'C'$, etc) et avec une diagonale égale (par exemple $AC = A'C'$). Alors les quadrilatères sont isométriques.

(4) Pouvez-vous proposer un énoncé inspiré de celui de la question (3) pour les polygones convexes à 5 côtés ? (On ne demande pas de le démontrer.)