Polygones convexes et triangles (g)

Exercice g.1 Soit $\mathcal{P}$ un polygone. Montrez l'équivalence des conditions suivantes :

(1) $\mathcal{P}$ est convexe (définition du cours),

(2) pour tous $A \in \mathcal{P}$ et $B \in \mathcal{P}$, on a $[AB] \subset \mathcal{P}$,

(3) tous les secteurs angulaires de $\mathcal{P}$ sont saillants.

Exercice g.2 On utilise la propriété (2) de l'exercice ci-dessus pour définir la notion de convexité pour une partie quelconque du plan (pas nécessairement un polygone) : une partie quelconque $\mathcal{P}$ est dite convexe si pour tous $A \in \mathcal{P}$ et $B \in \mathcal{P}$, on a $[AB] \subset \mathcal{P}$.

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan et M un point n'appartenant pas à $\mathcal{D}$. Quelle est la plus petite partie convexe contenant $\mathcal{D}$ et M ? Même question avec la réunion de deux cercles.

Exercice g.3 Soient $n \geq 3$ points du plan $A_1, \ldots, A_n$ non situés sur une même droite. Montrez qu'il existe une plus petite partie convexe qui les contienne tous et que c'est un polygone.
(*Indic : faites une récurrence sur n.*)

Exercice g.4 On dit qu'un polygone est *régulier* si tous ses côtés sont égaux, et tous ses angles sont égaux. Soit $\mathcal{P} = (A_0, \ldots, A_n)$, avec $A_0 = A_n$, un polygone convexe inscrit dans un cercle de centre O (c'est-à-dire que les sommets A_i sont sur le cercle). On suppose que tous les angles de $\mathcal{P}$ sont égaux.

(1) Donnez un exemple qui montre que $\mathcal{P}$ n'est pas forcément un polygone régulier.

(2) Montrez qu'on a, pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, l'égalité des longueurs $A_{i-1}A_i = A_{i+1}A_{i+2}$.
(*Indic : soit α la valeur commune des angles de $\mathcal{P}$. Faites apparaître des triangles isocèles en O : on rappelle qu'un triangle est isocèle ssi il a deux côtés égaux, ou encore, ssi il a deux angles égaux.*)

(3) On suppose que n est impair. Montrez que $\mathcal{P}$ est régulier.

Exercice g.5 On appelle labyrinthe un polygone dont tous les côtés consécutifs sont perpendiculaires et on imagine un véritable labyrinthe, avec des murs, réalisé selon ce plan. (Le polygone étant une ligne fermée c'est donc un labyrinthe sans issue.) Un aveugle est déposé quelque part près de ce labyrinthe. Comment peut-il savoir s'il se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur du labyrinthe ?
(*Indic : laisser un repère au point de départ et parcourir à tâtons tout le labyrinthe en examinant les bords.*)

Exercice g.6 Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont *isométriques* si et seulement si tous leurs côtés sont égaux ($AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$) et tous leurs angles sont égaux. C'est la même chose que de dire qu'il existe une isométrie u telle que $u(ABC) = A'B'C'$. Nous allons donner une illustration du théorème suivant, appelé *premier cas d'isométrie des triangles* ([1]) :

(CAC) : si deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont deux côtés égaux et les angles entre ces côtés égaux, ils sont isométriques.

(1) Soit ABC un triangle. On construit deux triangles rectangles isocèles ABC' et ACB' à l'extérieur de ABC. Soit M le milieu de $[BC]$. Montrer qu'on a $B'M = C'M$ et $\widehat{B'MC'} = \pi/2$.
(*Indic : introduire les milieux N et P de $[AC]$ et $[AB]$. Utiliser (CAC) pour montrer que les triangles $C'PM$ et MNB' sont isométriques. Ensuite montrez que $(C'P)$ est perpendiculaire à (MN).*)

(2) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe quelconque. On construit à l'extérieur de $ABCD$ quatre carrés bâtis sur les côtés de $ABCD$. Soient A', B', C', D' les centres de ces carrés (dans l'ordre). Montrer qu'on a $A'C' = B'D'$ et que $(A'C')$ et $(B'D')$ sont perpendicualires.
(*Indic : introduire J le milieu de $[BD]$. Utiliser (1) et (CAC) pour montrer que les triangles $A'JC'$ et $D'JB'$ sont isométriques. Trouver une rotation qui fait passer de l'un à l'autre.*)

[1] On note CAC pour « côté angle côté ».