Licence FONDNATEXP, UE Maths 305

Nombres premiers (f)

Dans ces énoncés on abrège parfois « décomposition en facteurs premiers » en « DFP ».
*Une * désigne un exercice un peu plus difficile.*

Exercice f.1 Décomposez en facteurs premiers les nombres

(1) 119, 121, 123, 125,127.

(2) 238, 3450.

(3) 43, 143, 243, 343, 443.

(4) * le nombre n quotient de $F_5 = 2^{32} + 1$ par 641. (*Aidez-vous d'une calculatrice !*)

Exercice f.2 Déterminez le pgcd des couples d'entiers suivants, en utilisant la DFP puis l'algorithme d'Euclide : (a) 10920 et 3300 (b) 4921 et 8436.

Exercice f.3 (1) Soient $k \geq 2$ et $a \geq 2$ des entiers. Considérons la DFP $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$. Montrez que a est une puissance $k^{\text{ème}}$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on a $k|\alpha_i$.

(2) Soient $a \geq 2$ et $b \geq 2$ des entiers et considérons leur DFP $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ et $b = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_s^{\beta_s}$. Montrez que a et b sont premiers entre eux si et seulement si $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ et $\{q_1, q_2, \dots, q_s\}$ sont disjoints.

Exercice f.4 (1) Soit $n \geq 2$ entier. Y a-t-il un nombre premier parmi les nombres $n! + 2$, $n! + 3$,..., $n! + n$?

(2) * Soit $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$ la suite des nombres premiers. La suite de terme général $u_k = p_k - p_{k-1}$ est-elle bornée ?

Exercice f.5 Soit $n := 100!$. Par combien de zéros se termine l'écriture décimale de n ?

Exercice f.6 Soient a, b, c trois entiers strictement positifs.

(1) Démontrez que $\text{pgcd}(\text{pgcd}(a, b), c) = \text{pgcd}(a, \text{pgcd}(b, c)) = \text{pgcd}(\text{pgcd}(a, c), b)$ en utilisant la DFP. Montrez que c'est le plus grand des diviseurs communs à a, b et c. On le note $\text{pgcd}(a, b, c)$.

(2) On dit que a, b, c sont *premiers entre eux dans leur ensemble* si $\text{pgcd}(a, b, c) = 1$. Est-ce que c'est la même chose que de dire que a, b et c sont premiers entre eux deux à deux ?.

(3) On définit $\text{ppcm}(a, b, c)$ de la même manière que pour le pgcd dans (1). A-t-on $\text{pgcd}(a, b, c) \times \text{ppcm}(a, b, c) = abc$?

Exercice f.7 On veut démontrer l'énoncé suivant : « Soient $k \geq 2$ et $n \geq 2$ des entiers, et $a_1, a_2, \dots, a_n$ entiers naturels premiers entre eux deux à deux. Alors le produit $a_1 a_2 \dots a_n$ est une puissance $k^{\text{ème}}$ si et seulement si chaque a_i l'est ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$). »

Pour simplifier on suppose dans la suite de tout l'exercice que $n = k = 2$.

(1) Écrivez l'énoncé correspondant à $n = k = 2$.

(2) Démontrez-le en utilisant la DFP.

(3) Le résultat est-il vrai si a et b ne sont pas premiers entre eux ?

Exercice f.8 * On veut résoudre l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ avec x, y, z dans $\mathbb{Z}$. (C'est l'équation de Fermat pour $n = 2$. Ses solutions sont appelés des *triplets pythagoriciens* en référence au théorème de Pythagore : ce sont les longueurs des côtés de certains triangles rectangles.)

(1.a) Supposons que (x, y, z) est une solution avec x, y, z premiers entre eux dans leur ensemble. En regardant les restes dans la division euclidienne modulo 4 montrez l'un des nombres x et y est impair et l'autre pair, et que z est impair. On suppose désormais que x est impair, quitte à échanger x et y.

(1.b) Soient $a = \frac{z-x}{2}$, $b = \frac{z+x}{2}$ et $c = \frac{y}{2}$. Montrez que a et b sont des entiers carrés premiers entre eux.

(2) Déterminez toutes les solutions de l'équation (*ne pas oublier qu'un triplet solution (x, y, z) n'est pas nécessairement constitué d'entiers premiers entre eux dans leur ensemble ; utiliser (1)(b); revenir à x, y, z*).

(3) Donnez un exemple de triangle rectangle à côtés entiers et premiers entre eux dans leur ensemble, dont l'hypothénuse est supérieure à 300.