pgcd et ppcm (e)

Exercice e.1 Utilisez l'algorithme d'Euclide pour déterminer le pgcd des nombres :

(a) 360 et 756	(c) 3276 et 3861
(b) 322 et 1078	(d) 942 et 1319

Pour (a) et (d) donnez une relation de Bézout.

Exercice e.2 Soient a, b et c trois entiers strictement positifs tels que $\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(a, c)$. A-t-on $\mathrm{ppcm}(a, b) = \mathrm{ppcm}(a, c)$?

Exercice e.3 Déterminer la (plus petite) période de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \cos\frac{x}{21} + \cos\frac{x}{35}$$

Exercice e.4 Soient $a, b \in \mathbb{N}$ strictement positifs. Soit $k > 0$ un entier. Montrez que $\mathrm{pgcd}(ka, kb) = k\,\mathrm{pgcd}(a, b)$ et $\mathrm{ppcm}(ka, kb) = k\,\mathrm{ppcm}(a, b)$.

Exercice e.5 Soit n un entier naturel non nul. Démontrez, en utilisant le théorème de Bézout, que les nombres suivants sont premiers entre eux : (a) n et $2n + 1$ (b) $5n + 2$ et $7n + 3$.

Exercice e.6 Soit $a, b \in \mathbb{N}$ non tous deux nuls et $d = \mathrm{pgcd}(a, b)$. On se propose de décrire tous les couples (λ, μ) tels que $d = \lambda a + \mu b$ (les « couples de Bézout » pour a et b). On fixe (λ_0, μ_0) l'un d'entre eux, donné par exemple par l'algorithme d'Euclide. Soient a', b' tels que $a = da'$ et $b = db'$.

(1) Vérifiez qu'il n'y a jamais un seul couple de Bézout (λ, μ).

(2) Soit (λ, μ) un autre couple qui vérifie l'égalité de Bézout. Montrez que b' divise $\lambda - \lambda_0$.

(3) Montrez que les « couples de Bézout » (λ, μ) sont exactement les couples de la forme

$$(\lambda, \mu) = (\lambda_0 + kb', \mu_0 - ka') \qquad \text{avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice e.7 Soit $a, b \in \mathbb{N}$ strictement positifs et $d = \mathrm{pgcd}(a, b)$. Montrez qu'il existe un unique couple d'entiers relatifs $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

(i) $d = \lambda a + \mu b$, et

(ii) $0 \leq d\lambda < b$.

Exercice e.8 Soient $d > 0$ et $m > 0$ deux entiers.

(1) Déterminer à quelle(s) condition(s) d et m peuvent être le pgcd et le ppcm de deux entiers a et b.

(2) On suppose que $d|m$ et on appelle ν le nombre de diviseurs premiers de m/d. Montrer que le nombre de couples (a, b) tels que $d = \text{pgcd}(a, b)$ et $m = \text{ppcm}(a, b)$ est égal à 2^ν.

Exercice e.9 Trouvez les couples (a, b) d'entiers naturels ($a < b$) dont le pgcd d et le ppcm m vérifient : $2m + 3d = 78$ et tels que a ne divise pas b.

Exercice e.10 Soit $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante telle que

- $f(2) = 2$
- $f(mn) = f(m)f(n)$ pour tout couple d'entiers premiers entre eux (m, n).

(1) Montrez que $f(n) \geq n$ pour tout $n \geq 0$.

(2) En partant de l'inégalité $15 < 18$ montrez que $f(3) = 3$.

(3) Montrez que $f(2^n + 1) = 2^n + 1$ pour tout $n \geq 1$.

(4) Déduisez-en que $f(n) = n$ pour tout n.