# Bases de numération (c)

**Exercice c.1** Écrire 4498 en base 423 et 423 en base 4498.

**Exercice c.2** Olivier a constaté que, pour tout nombre à trois chiffres qui s'écrit $abc$ en base 10, si $b = a + c$ alors le nombre est divisible par 11. A-t-il raison ? Justifier la réponse.

Si $abc$ est divisible par 11, a-t-on $b = a + c$ ?

**Exercice c.3** Exprimez la durée de 1494312 secondes à l'aide de semaines, jours, heures, minutes. Comment adapter l'algorithme d'écriture en base $b$ (*cf* démonstration du cours) pour retrouver ce résultat ? Comment qualifieriez-vous le système de numération utilisé pour exprimer les durées ?

**Exercice c.4** Déterminez l'écriture en base 5 de : 126, 221 et 1000. Déterminez ensuite leur écriture en base 16.

**Exercice c.5** Calculez, en numération binaire,

(1) la somme $S = \overline{1101} + \overline{1011}$

(2) la différence $D = \overline{1101} - \overline{1011}$

(3) les produits $\overline{110} \times \overline{11}$, $(\overline{101})^2$ et $\overline{1001101}$.

**Exercice c.6** Combien y a-t-il de nombres ayant exactement 5 chiffres en numération binaire ?

Soient $b \geq 2$ et $n \geq 2$ deux entiers. Combien y a-t-il de nombres ayant exactement $n$ chiffres en numération à base $b$ ? Donner la valeur du plus petit et du plus grand de ces nombres.

Donnez les exemples de $b = 2$ et $n = 5$, $b = 10$ et $n = 4$.

**Exercice c.7** Dans un système de numération de base $n$, on considère les nombres

$$A = \overline{211} \quad ; \quad B = \overline{312} \quad ; \quad C = \overline{133032}$$

(1) Sachant que $C = AB$, montrez que $n$ divise 8. Déduisez-en la valeur de $n$.

(2) Écrivez $A$, $B$ et $C$ dans le système décimal.

**Exercice c.8** Critères de divisibilité.

(1) Démontrez les critères de divisibilité par 2, 4, 5, 10 et 25. (*Indic.* : DE par 10 ou par 100)

(2) Démontrez que pour tout $n$ il existe un entier $k$ tel que $10^n = 9k + 1$. Déduisez-en les critères de divisibilité par 3 et par 9.

(3) Démontrez que pour tout $n$ il existe un entier $k$ tel que $10^n = 11k + (-1)^n$. Déduisez-en le critère de divisibilité par 11 suivant : *un nombre qui s'écrit* $a = r_n r_{n-1} \dots r_0$ *en base* 10 *est divisible par* 11 *si et seulement si* $r_n - r_{n-1} + \cdots + (-1)^n r_0$ *est divisible par* 11.

**Exercice c.9** Soit $n$ un nombre de trois chiffres dont le chiffre des centaines est $x$, celui des dizaines est $y$ et celui des unités $z$. Si $n$ est divisible par 7, lesquels des nombres suivants

$$z \; ; \; xyz \; ; \; 2x + 3y + z \; ; \; x + y + z \; ; \; 5x - y + 2z$$

sont divisibles par 7 ?

# Divisibilité et congruences (d)

**Exercice d.1** (1) Soit $x$ un entier naturel. Montrez que $x+1$ divise $x^3+1$.

(2) Montrez par récurrence que $\forall k \geq 1$, $3^k$ divise $2^{3^k}+1$.

**Exercice d.2** Montrer que $n^5-n$ est divisible par 5 pour tout entier $n$.

**Exercice d.3** Soit $p$ un nombre premier. Montrez que pour tout entier $i$ tel que $0 < i < p$ on a $p|\mathrm{C}_p^i$.

**Exercice d.4** Soit $p$ un nombre premier. Montrer que :

(1) pour tous entiers $a, b$ on a : $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \quad (p)$.

(2) $n^p - n$ est divisible par $p$, pour tout $n \geq 0$ (raisonner par récurrence). Cela généralise le résultat de l'exercice d.2.

(3) et si $p$ n'est pas premier ?

**Exercice d.5** Résolvez l'équation $x^y = y^x$ dans $\mathbb{Z}$. (Commencez par montrer que $x$ divise $y$ si $x < y$.)

**Exercice d.6** Résolvez dans $\mathbb{Z}$ les équations :

(1) $3x \equiv 1 \bmod 5$.

(2) $5x \equiv 2 \bmod 7$.

(3) Le système formé par (1) et (2).

**Exercice d.7** Décomposer 217 en produit de facteurs premiers. Résolvez l'équation $x^3+y^3=217$ dans $\mathbb{Z}$.

**Exercice d.8** Des militaires américains alignent 100 prisonniers irakiens en file indienne dans la cour de la prison. On les habille de costumes blancs ou noirs, mais aucun prisonnier ne connaît la couleur de son propre costume, ne voyant que la couleur de ceux qui sont devant lui dans la file. Il peut y avoir un nombre arbitraire de costumes blancs et noirs.

Les militaires s'apprêtent à exécuter les prisonniers, en leur laissant une chance d'être sauvés de la façon suivante. L'un après l'autre, chaque prisonnier doit annoncer sa couleur à voix haute (en commençant par celui qui voit tous les autres), et il n'est sauvé que s'il trouve juste.

Avant d'entrer dans la cour de la prison les prisonniers ont eu la possibilité de convenir entre eux d'une tactique pour annoncer les couleurs. Quel nombre maximal de prisonniers peuvent être sauvés de manière certaine, et par quelle tactique ?