Les entiers naturels (a)

Exercice a.1 Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n$ est pair.

Exercice a.2 Calculer, en posant les opérations :

$$423 \times 4498 \quad ; \quad 423 - 4498 \quad ; \quad 42,3 + 44,98 \quad ; \quad 4498 \div 423$$

Exercice a.3 Comparer les nombres $n!$ et 3^n.

Exercice a.4 Il reste 2 heures 47 sur mon forfait 3 heures. Lucie est très bavarde, et chaque coup de téléphone avec elle me coûte 29 minutes. Combien de fois est-ce que je peux encore l'appeler ? Hugo, lui, n'a jamais rien à dire au téléphone et ça dure 7 minutes. Combien de temps au maximum puis-je téléphoner en combinant des coups de fil à Lucie et Hugo ?

Exercice a.5 Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est multiple de 3.

Exercice a.6 On remarque que :

$$\begin{array}{lll} 65^2 = 4225 & \text{et que} & 6 \times 7 \times 100 + 25 = 4225 \\ 145^2 = 21025 & \text{et que} & 14 \times 15 \times 100 + 25 = 21025 \\ 1275^2 = 1625625 & \text{et que} & 127 \times 128 \times 100 + 25 = 1625625 \end{array}$$

(a) Généraliser cette remarque en proposant une relation mathématique.

(b) Vérifier cette relation sur deux autres exemples.

(c) Démontrer cette relation.

Exercice a.7 Démontrez que pour tout quadruplet d'entiers naturels m, n, p, q on a :

$$(m \leq n \quad \text{et} \quad p \leq q) \quad \Rightarrow \quad m - p \leq n - q$$

Exercice a.8 Calculer $1 + 2 + \cdots + n$, puis $a^m + \cdots + a^n$ pour $m \leq n$.

Exercice a.9 Déterminer le nombre de régions délimitées par n droites en position générale (ce qui signifie que deux quelconques des droites ne sont pas parallèles et que trois quelconques ne sont pas concourantes).

Exercice a.10 Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

(i) Le principe de récurrence est vrai.

(ii) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément.

Division euclidienne (b)

Exercice b.1 La girouette indique le Nord. Un fort coup de vent la fait tourner dans le sens des aiguilles d'une montre de 14060 degrés. Quelle direction indique-t-elle maintenant ?

Exercice b.2 Le reste de la division euclidienne de m par 17 est 8, celui de n est 12. Déterminer le reste de la division euclidienne par 17 de $m+n$, mn et m^2.

Exercice b.3 Trouver le reste de la division euclidienne de 10^n par 6.

Exercice b.4 Soient $a, b \in \mathbb{N}$ avec $b > 0$. Soit q le quotient et r le reste de la division euclidienne de a par b. Soit $h \in \mathbb{N}$ et c un diviseur de b.

(1) Le quotient de la division euclidienne de $a+h$ par b est-il égal à q ?

(2) Le quotient de la division euclidienne de a par $b+h$ est-il égal à q ?

(3) Le quotient de la division euclidienne de $a+h$ par $b+h$ est-il égal à q ?

(4) Le quotient de la division euclidienne de a par c est-il égal à q ?

(5) Le quotient de la division euclidienne de a par q est-il égal à b ?

Exercice b.5 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne :

(1) de n^2+n+1 par $n+1$,

(2) de n^2+n+1 par $n+2$,

(3) de 2^n-1 par 2^{n-1}.

Exercice b.6 On divise un nombre a par 125, le reste est 3. Quel peut être le reste de la division de a par 5 ? Même question si le reste est 13.

On divise un nombre b par 5, le reste est 3. Quel peut être le reste de la division de b par 15 ?

Exercice b.7 En divisant le nombre a par 122 et par 125 on trouve le même quotient et des restes respectifs de 52 et 40. Calculer a.