Géométrie plane

Cette partie du cours a pour but de revoir ainsi que d'approfondir certains résultats connus. Une de nos préoccupations, au cours du chemin, sera de faire la part entre

- des énoncés de départ non démontrés. Du point de vue du Professeur des Écoles, on peut considérer que ce sont des choses basiques que doit s'approprier un enfant comme évidentes, lorsqu'il joue avec des couleurs, des formes géométriques, compare leurs longueurs... C'est l'apprentissage de la perception, de l'intuition. Dans le vocabulaire du mathématicien, ces énoncés sont les *axiomes*.

- les résultats qui s'en déduisent. On verra qu'on peut démontrer la plupart des résultats classiques de Géométrie (théorèmes de Pythagore, Thalès ; calculs de longueurs et d'aires de figures usuelles). Du point de vue du Professeur des Écoles, pour ses élèves c'est l'apprentissage du raisonnement. Du point de vue du mathématicien, c'est simplement le développement de la théorie.

1 Géométrie d'Euclide, Géométrie d'aujourd'hui

L'un des buts de la Géométrie est d'arriver à mieux percevoir et décrire les objets qui se trouvent autour de nous, et pour commencer, les plus simples d'entre eux : en dimension 2, droites, cercles, polygones ; en dimension 3, sphères, boules, cubes, polyèdres...

1.1 La Géométrie d'Euclide. Une façon de décrire les objets géométriques est d'adopter un point de vue qualitatif : c'est à ça que servent les notions de parallélisme ou d'incidence de deux droites, de convexité ou de concavité d'un polygone, d'angles aigus ou obtus, d'intérieur d'une figure, etc. Ainsi Euclide développa-t-il la Géométrie du plan sans recours explicite à des longueurs ou des angles en tant que nombres. (Par ailleurs, du temps des Grecs anciens les nombres réels n'avaient pas été inventés — voir encadré ci-dessous — donc il aurait été bien difficile de décider quelle genre de quantité une longueur doit être). De cette manière il établit presque tous les résultats dont nous allons parler. Signalons que certains des raisonnement d'Euclide ne seraient pas considérés comme valables aujourd'hui, mais Hilbert a repris tout le travail d'Euclide en 1899 (plus de vingt siècles plus tard !) pour le rendre correct.

David Hilbert (1862-1943) naquit et étudia à Königsberg (à l'époque en Prusse). En 1895 il fut nommé professeur à Göttingen (presque un siècle après Gauß), où il s'installa jusqu'à la fin de sa vie. Hilbert apporta d'immenses contributions à de nombreuses branches des mathématiques. En 1899 il publia les résultats de ses travaux (les *Grundlagen der Geometrie*, fondations de la Géométrie) visant à donner des fondements axiomatiques rigoureux à la géométrie d'Euclide. Au Congrès International des Mathématiciens de 1900 à Paris, il posa une liste de 23 problèmes ouverts qui ont été l'objet de recherches incessantes depuis lors (beaucoup ont été résolus).

1.2 La Géométrie d'aujourd'hui. Le point de vue quantitatif consiste à associer des nombres aux objets géométriques : on cherche alors à mesurer des grandeurs telles que la longueur d'une courbe, l'aire d'une figure du plan ou de l'espace, ou l'angle entre deux droites. Tous les nombres en question seront des nombres réels. C'est la principale chose qui diffère de la Géométrie telle que la pratiquait Euclide (mais la différence est de taille !).

> ∼ UNE COURTE HISTOIRE DES NOMBRES ∼
>
> Les ensembles de nombres que nous manipulons sont $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ (entiers naturels, entiers relatifs, rationnels, réels, complexes). Ils sont inclus les uns dans les autres. Ce que les Grecs appelaient *nombres* correspond à ce que nous appelons nombres rationnels (les fractions a/b de nombres entiers relatifs). Ils connaissaient donc $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ mais avaient remarqué que certaines quantités naturelles (telle que la diagonale du carré de côté 1, qui vaut $\sqrt{2}$) n'étaient pas des fractions.
> Au Moyen-Âge, les mathématiciens arabes et chinois étudièrent les équations polynômiales ; à la Renaissance, les mathématiciens italiens résolurent plus particulièrement les équations du troisième degré. Cela amena à considérer les solutions de ces équations (par exemple $\sqrt{2}$ racine de $X^2-2=0$, ou i racine de $X^2+1=0$...) comme des nombres à part entière. Les premiers nombres construits avec i furent appelés *imaginaires*. Il faut remarquer qu'on ne connaissait de nombres complexes que ceux qui étaient racines de polynômes. Par exemple, le nombre π (demi-périmètre du cercle de rayon 1) ou le nombre e (base des logarithmes népériens) étaient connus mais incompris.
> Vers la fin du $19^{\text{ème}}$ siècle, le mathématicien allemand Richard Dedekind (1831-1916) donna une (très élégante) construction de l'ensemble des réels, aujourd'hui indispensables à la Géométrie. Sa construction introduit les réels comme des « coupures » dans l'ensemble des rationnels.
>
> J'en profite pour vous rappeler l'excellente adresse internet où on peut consulter la biographie de Dedekind et de beaucoup d'autres : http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/∼history/BiogIndex.html

Exercice 1.3 Montrez que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. (*Indic : supposez que* $\sqrt{2}=a/b$. *Élevez au carré puis utilisez la décomposition en facteurs premiers de* a *et* b)

1.4 La Géométrie emprunte aux deux approches : qualitative et quantitative. Naturellement c'est la première approche qui convient le mieux les enfants, car ils y voient un terrain d'expression de leur intuition (et aussi car ils ne maîtrisent pas encore les nombres !).

Pour cette raison, nous essaierons d'aller le plus loin possible dans le développement du cours sans utiliser de nombres réels ([1]).

1.5 Petite parenthèse de Sciences Physiques

Le fait de manipuler des grandeurs nous oblige à nous demander ce que c'est, et ce que veut dire mesurer une grandeur. Quelques rappels seront donc utiles.

1.5.1 Il y a dans la nature des *grandeurs* physiques. Il n'a pas de sens de vouloir comparer entre elles des grandeurs différentes, comme la longueur d'une règle, le poids d'une pomme, le temps mis par la Terre pour tourner une fois sur elle-même, ou le volume d'un récipient. Ainsi ça n'a pas de sens d'écrire

« la longueur du terrain de foot est plus petite que son aire »

Deux grandeurs différentes ne peuvent pas non plus être ajoutées ou retranchées, par exemple ça n'a pas de sens d'écrire

[1] Mais nous en passer complètement, comme le fit Euclide, nous écarterait de l'un de nos objectifs : présenter la Géométrie du plan de manière à la fois intuitive (pour pouvoir être enseignée), moderne et efficace (pour pouvoir calculer des longueurs et des aires, par exemple). Donc nous présenterons aussi les coordonnées dans $\mathbb{R}^2$, le moment venu.

« l'aire du triangle rectangle + la longueur de l'hypothénuse »

Par contre, on peut multiplier ou diviser des grandeurs physiques différentes, et on en obtient alors une nouvelle. Par exemple, si on divise une longueur par une durée on obtient une vitesse, et si on multiplie une longueur par une longueur on obtient une aire.

1.5.2 Chaque grandeur physique peut être mesurée si on choisit un *étalon* ou *unité*. Dans l'exemple de la longueur, on choisit donc une *longueur étalon* ou *longueur unité*. Mesurer une longueur veut dire la comparer à la longueur unité qu'on a choisie, et dès lors cette longueur unité devient *unité de longueur* pour la mesure. Une fois une unité choisie, la *mesure* d'une grandeur est le nombre de fois que l'unité intervient. Par exemple, la rotation de la Terre sur elle-même a une durée (c'est une grandeur) que l'on peut mesurer en heures ou en minutes (ce sont des unités). Le résultat est 24 heures, ou 1440 minutes : deux unités différentes donnent deux mesures différentes, pour la même grandeur. On voit donc qu'*il ne faut pas confondre « grandeur » et « mesure d'une grandeur »*.

Objet	Ex. de grandeur attachée	Unité de mesure de la grandeur	
segment	longueur	mètre	m
secteur angulaire	angle	radian	rad
domaine du plan	aire	mètre carré	m^2
cours de Maths	durée	seconde	s
casserole	température	degré celsius	^{o}C
saucisson	masse	kilogramme	kg
saucisson	poids	newton	N
saucisson	volume	mètre cube	m^3

(Une aire et une durée sont aussi attachées à la *surface* du saucisson et au *moment* où on le mange.)

1.5.3 Dans la suite les grandeurs qui nous intéresseront seront la longueur, l'angle, et l'aire. Pour ne pas alourdir le vocabulaire nous dirons presque tout le temps « longueur » ou « aire » au lieu de « mesure de la longueur » ou « mesure de l'aire », mais en restant conscient du fait que ce n'est là qu'une commodité de langage.

2 Quelques définitions dans l'esprit d'Euclide

Posez-vous les questions « Qu'est-ce qu'une droite ? » ou « Qu'est ce que la longueur d'un morceau de courbe tracé sur le tableau ? » et vous verrez qu'il n'est pas simple ne serait-ce que de définir les objets de la Géométrie et leurs grandeurs caractéristiques ([2]).

Pour résoudre ce problème, l'approche d'Euclide revient à *ne pas définir* les concepts les plus intuitifs comme les points et les droites, mais *supposer qu'ils existent* en acceptant leurs propriétés de base, qu'on doit énoncer.

2.1 Points et droites

On postule ([3]) l'existence d'un ensemble E appelé *plan euclidien* et dont les éléments s'appellent les *points*. Cet ensemble possède des parties d'intérêt particulier appelées les *droites*, qui vérifient les propriétés suivantes ([4]) :

[2]Malheureusement le dictionnaire risque de ne pas vous satisfaire beaucoup sur ces questions...
[3]« On postule », « on suppose »... : ces locutions indiquent qu'on introduit là des objets dont l'existence et les propriétés sont admises (les fameux axiomes).
[4]On les appelle des propriétés d'*incidence*, d'où l'utilisation de la lettre « I » pour nommer les axiomes.

(I1) Par deux points distincts A et B du plan passe une et une seule droite notée (AB).

(I2) Toute droite contient au moins deux points.

(I3) Il existe trois points non alignés.

En conséquence, deux droites distinctes ont au plus un point commun.

Définition 2.1.1 Deux droites sans point commun sont dites *parallèles*. Ont dit alors qu'elles définissent la même *direction* (si on préfère, une direction est donc un ensemble de droites parallèles à une droite fixée). Deux droites distinctes qui se coupent sont dites *sécantes*.

On suppose aussi vérifiée la propriété :

(P) Par un point M non situé sur la droite $\mathcal{D}$ passe une droite parallèle à $\mathcal{D}$ et une seule.

2.2 Ordre des points

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. On suppose qu'il existe une relation d'ordre entre les points de $\mathcal{D}$ (on l'écrit : « C est entre A et B »), qui vérifie les propriétés suivantes.

(O1) Étant donnés trois points A, B, C sur $\mathcal{D}$, si B est entre A et C, B est entre C et A.

(O2) Étant donnés deux points distincts A, B sur $\mathcal{D}$, il existe un point C entre A et B et distinct d'eux.

(O3) Étant donnés trois points distincts A, B, C sur $\mathcal{D}$, un et un seul d'entre eux est entre les deux autres.

La relation d'ordre permet de définir différents concepts usuels.

Définitions 2.2.1 (1) Soient A et B deux points du plan. Le *segment d'extrémités A et B* est l'ensemble des points situés entre A et B (on considère que « A est entre A et B » de sorte que les extrémités appartiennent au segment). On le note $[AB]$.

(2) La *demi-droite d'origine A et contenant B* est l'ensemble des points M tels que M est situé entre A et B, ou B est situé entre A et M. On la note $[AB)$. On appelle parfois demi-droite *opposée* à $[AB)$ l'ensemble des points M tels que A est entre M et B. Un *sens* sur la droite (AB) est le choix d'une des deux demi-droites : $[AB)$ ou son opposée.

(3) Le *demi-plan délimité par la droite $\mathcal{D}$ et contenant le point A* est l'ensemble des points M du plan tels que : $M \in \mathcal{D}$ ou le segment $[AM]$ ne rencontre pas $\mathcal{D}$.

(4) Le *triangle de sommets A, B, C* est la réunion des trois segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$. On le note ABC. Son *intérieur* est l'intersection des trois demi-plans ouverts délimités par (AB) (resp. (BC), (AC)) contenant C (resp. A, B).

Chacun de ces concepts possède une variante *ouverte* et une variante *fermée* : par exemple le segment semi-ouvert $]AB]$, la demi-droite ouverte $]AB)$.

2.3 Secteurs angulaires

Définition 2.3.1 Soit O un point du plan et $[OA)$, $[OB)$ deux demi-droites issues de O.

(i) Supposons d'abord O, A, B non alignés. Soit H_A^+ (resp. H_A^-) le demi-plan fermé délimité par (OA) et contenant B (resp. ne contenant pas B). Les demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ délimitent

- le *secteur angulaire saillant* $[\widehat{AOB}]$:
  par définition c'est $H_A^+ \cap H_B^+$.
- le *secteur angulaire rentrant* $[AOB]^\vee$:
  par définition c'est $H_A^- \cup H_B^-$.

(ii) Supposons O, A, B alignés et $[OA) = [OB)$. Alors le secteur angulaire saillant est réduit à $[OA)$, on l'appelle un *secteur nul*. Le secteur angulaire rentrant est le plan tout entier, on l'appelle un *secteur plein*.

(iii) Supposons O, A, B alignés et les demi-droites opposées. Alors les deux secteurs angulaires (saillants ou rentrants tous deux) sont les demi-plans délimités par (OA). On les appelle des *secteurs plats*.

Si les demi-droites sont notées δ_1 et δ_2, on utilise aussi les notations $[\widehat{\delta_1, \delta_2}]$ et $[\delta_1, \delta_2]^\vee$ pour désigner les secteurs angulaires, ou même $[\delta_1, \delta_2]$ si on ne précise pas saillant/rentrant.

2.4 Longueurs

On suppose qu'il existe une *mesure des longueurs* des segments du plan, c'est-à-dire une fonction ℓ qui à un segment $[AB]$ associe un nombre positif noté $\ell([AB])$ ou plus simplement AB, et que cette fonction vérifie les propriétés suivantes :

(L1) Étant donné un segment $[AB]$ et une demi-droite δ d'origine C, il existe un unique point $D \in \delta$ tel que $AB = CD$.

(L2) Soient trois points alignés A, B, C avec B entre A et C. Alors $AC = AB + BC$.

Il s'agit ici d'une adaptation de la formulation d'Euclide. En fait, comme nous l'avons dit, Euclide ne parlait pas du tout de « nombre » (je suis resté volontairement vague ci-dessus) et, en remplacement, comparait les segments de manière astucieuse pour pouvoir éviter ces mêmes nombres. Ainsi, l'addition de deux longueurs était remplacée par la « mise bout à bout » de deux segments.

Pour nos besoins, nous donnerons une définition plus complète de la longueur au paragraphe 5, et pour l'instant nous en restons à ces courts axiomes. Une variante de la longueur est parfois utile, la notion de *mesure algébrique* :

Définition 2.4.1 Soit δ une demi-droite d'origine O et $\mathcal{D}$ la droite qui la supporte. Alors on appelle *mesure algébrique d'un point M sur la droite $\mathcal{D}$ dans le repère formé par δ*, le nombre $\overline{OM}$ défini par : $\overline{OM} = OM$ si $M \in \delta$, et $\overline{OM} = -OM$ si $M \notin \delta$.

2.5 Angles

On suppose qu'il existe une *mesure des angles* des secteurs angulaires, et que cette fonction vérifie les propriétés suivantes :

(Ang1) Étant donné un secteur angulaire $\widehat{BAC}$ et une demi-droite $[EF)$, de chaque côté de (EF) il existe une unique demi-droite $[EG)$ telle que $\widehat{FEG} = \widehat{BAC}$.

(Ang2) (CAC) Supposons que deux triangles ont deux de leurs côtés « égaux » (c'est-à-dire, de longueurs égales) et les angles compris entre ces côtés égaux. Alors tous les côtés et tous les angles des triangles sont égaux (les triangles sont isométriques).

Exemple 2.5.1 Soient C, O, B trois point alignés, dans cet ordre. Soit A un point n'appartenant pas à la droite (OB). Si les deux secteurs $[\widehat{COA}]$ et $[\widehat{AOB}]$ ont même mesure, on dit que ce sont des secteurs angulaires *droits*. On dit aussi que l'angle $\widehat{AOB}$ est droit, et que les droites (OB) et (OA) sont *perpendiculaires* ou *orthogonales*.

On a une propriété analogue à la propriété (P) (paragraphe 2.1) avec les droites perpendiculaires : « par tout point M passe une droite perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$ et une seule ». (Le montrer est un exercice assez facile mais un peu long, en utilisant les axiomes qui précèdent.)

En particulier on peut définir la notion de *projection orthogonale* :

Définition 2.5.2 Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. Pour tout point $M \in E$, notons M' le point intersection de la droite $\mathcal{D}$ avec la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par M. On définit la *projection orthogonale sur* $\mathcal{D}$ notée $\pi_{\mathcal{D}}$ par $\pi_{\mathcal{D}}(M) := M'$.

Définitions 2.5.3 Soient C, O, B trois point alignés, dans cet ordre. Soit A un point n'appartenant pas à la droite (OB). On dit que les deux secteurs $[\widehat{COA}]$ et $[\widehat{AOB}]$ sont *supplémentaires*. (Cela veut dire que la somme de leurs angles est égale à l'angle plat.)
Soit $[\widehat{AOB}]$ un secteur angulaire droit et soit C un point situé à l'intérieur du secteur angulaire. On dit que les deux secteurs $[\widehat{AOC}]$ et $[\widehat{COB}]$ sont *complémentaires*. (Cela veut dire que la somme de leurs angles est égale à l'angle droit.)

Définitions 2.5.4 Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites parallèles, soit Δ une droite les coupant. On appelle O et O' les points d'intersection de Δ avec $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Soient A et B des points de $\mathcal{D}$ tels que O est situé entre A et B (et A', B' points de $\mathcal{D}'$ idem). On suppose que A et A' sont du même côté de Δ. Enfin, soient C et C' des points de Δ tels que C est situé de l'autre côté de $\mathcal{D}$ que O' et C' est situé de l'autre côté de $\mathcal{D}'$ que O. Alors :

(1) On dit que les secteurs $[\widehat{AOC}]$ et $[\widehat{BOO'}]$ sont *opposés*.

(2) On dit que les secteurs $[\widehat{BOO'}]$ et $[\widehat{A'O'O}]$ sont *alternes-internes*.

(3) On dit que les secteurs $[\widehat{AOC}]$ et $[\widehat{C'O'B'}]$ sont *alternes-externes*.

(4) On dit que les secteurs $[\widehat{BOO'}]$ et $[\widehat{B'O'C'}]$ sont *correspondants*.

2.6 Aires

Fixons maintenant deux points distincts O, I qui définissent donc une *unité de longueur* OI (voir 1.5.2 et 2.4). (Si on note $m := OI$ cette unité, pour faire penser au *mètre*, on a vu dans 1.5.2 que l'unité d'aire doit être $m^2 = OI^2$, le *mètre carré*.) On appelle *carré unité* le carré construit sur le côté $[OI]$, et on le note C.

On suppose qu'il existe une *mesure des aires*, c'est-à-dire une fonction $\mathcal{A}$ qui associe à certaines parties $\mathcal{P}$ du plan un nombre positif noté $\mathcal{A}(\mathcal{P})$, et que cette fonction vérifie les propriétés suivantes ([5]) :

(Air1) L'aire du carré unité C est égale à une unité : $\mathcal{A}(C) = 1$ ([6]).

(Air2) L'aire de deux parties disjointes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ (c'est-à-dire telles que $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$) est la somme des aires des deux parties : $\mathcal{A}(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) = \mathcal{A}(\mathcal{P}) + \mathcal{A}(\mathcal{Q})$.

(Air3) L'aire est invariante par isométrie : si $\mathcal{P}$ est une partie et u est une isométrie, on a $\mathcal{A}(u(\mathcal{P})) = \mathcal{A}(\mathcal{P})$.

(Air4) L'aire est *homogène* : si $\mathcal{P}$ est une partie et h est une homothétie de rapport λ, on a $\mathcal{A}(h(\mathcal{P})) = \lambda^2 \mathcal{A}(\mathcal{P})$.

Les axiomes (Air2) et (Air3) sont fondamentaux : ils sont à la base de la méthode de calcul des aires *par découpage et recollement* qui consiste, comme son nom l'indique, à calculer les aires de figures en les découpant en figures plus simples (on utilise (Air2)) et en recollant éventuellement les morceaux autrement (on peut déplacer les morceaux comme on veut grâce à (Air3), par translations et rotations). C'est la technique de base qu'utilisait Euclide. À l'aide de ces quelques propriétés on peut déjà calculer les aires de figures simples :

Lemme 2.6.1 *Un point et un segment ont une aire nulle.*

Démonstration : Soit A un point. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2, de sorte que $h(A) = A$. D'après l'axiome (Air4) on a $\mathcal{A}(h(A)) = 4\mathcal{A}(A)$ donc $\mathcal{A}(h(A)) = 0$.

Considérons maintenant le cas d'un segment $[AB]$. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2 et $C = h(A)$, donc $h([AB]) = [AC]$. D'après (Air2) on a $\mathcal{A}([AC]) = 4\mathcal{A}([AB])$. Par ailleurs $\mathcal{A}([AC]) = \mathcal{A}([AB]) + \mathcal{A}([BC]) = 2\mathcal{A}([AB])$. Donc $\mathcal{A}([AB]) = 0$. $\square$

À l'aide de ce résultat on peut renforcer un peu la propriété (Air2) : si deux parties ont pour intersection une réunion finie de points et de segments, alors on a $\mathcal{A}(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) = \mathcal{A}(\mathcal{P}) + \mathcal{A}(\mathcal{Q})$. Voici un premier exemple plus probant de calcul d'aire :

Proposition 2.6.2 *L'aire d'un rectangle* ([7]) *R de côtés de longueurs a et b est égale à ab.*

[5] Nous ne précisons pas quelles sont ces partites qui ont une aire, mais parmi elles figureront les polygones, car on peut toujours les découper en triangles.

[6] Ou si on préfère, $\mathcal{A}(C) = 1 \times OI^2$, l'unité étant OI^2.

[7] Le rappel de la définition d'un rectangle ne viendra qu'en 3.4.1...

Démonstration : Pour simplifier nous ne ferons la démonstration que dans le cas où a et b sont rationnels. Pour le cas où a et b sont quelconques, il faudrait utiliser le fait que tout nombre réel est limite de nombres rationnels.

Supposons d'abord que a et b sont entiers. Alors on peut découper les côtés du rectangle en a, resp. b segments de longueur unité. On obtient ab carrés et donc d'après (Air2) l'aire de R est égale à ab.

Supposons maintenant que a et b sont rationnels, $a = p_1/q_1$ et $b = p_2/q_2$. Soit h une homothétie de rapport q_1q_2, elle « dilate » le rectangle R en un rectangle R' de côtés $a' = p_1q_2$ et $b' = p_2q_1$ qui sont des entiers. Donc l'aire de R' est $p_1q_2p_2q_1$ d'après ce qui précède. Ainsi $p_1q_2p_2q_1 = \mathcal{A}(h(R)) = (q_1q_2)^2\mathcal{A}(R)$ donc $\mathcal{A}(R) = \frac{p_1q_2p_2q_1}{(q_1q_2)^2} = ab$. □

Exercice 2.6.3

(1) Soit ABC un triangle et AH la hauteur issue de A. Montrez que $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}BC \times AH$.

(2) Soit $ABCD$ un trapèze, on appelle *grande base* et *petite base* ses côtés parallèles, et *hauteur* la distance entre ces deux bases (léger abus de langage). Soient B et b les longueurs des bases et h la hauteur. Montrez que $\mathcal{A}(ABCD) = \frac{1}{2}(B + b) \times h$.

3 Polygones classiques et leurs symétries

3.1 Médiatrices et bissectrices

Disposer des longueurs et des angles permet de définir les notions de milieu et médiatrice (qui divisent un segment en deux) et de bissectrice (qui divise un secteur en deux) :

Définition 3.1.1 Soit $[AB]$ un segment.
On appelle *milieu* de AB l'unique point $I \in [AB]$ tel que $AI = IB$.
Supposons que $A \neq B$. On appelle *médiatrice de* $[AB]$ la droite Δ perpendiculaire à (AB) passant par I.
Soient δ_1 et δ_2 deux demi-droites de même origine O. Choisissons deux points M_1, M_2 sur ces demi-droites de sorte que $OM_1 = OM_2$, et notons S l'un des deux secteurs (saillant ou rentrant) délimité par δ_1 et δ_2. La *demi-droite bissectrice* de S est la demi-droite, d'origine O, supportée par la médiatrice de $[M_1M_2]$ et contenue dans S. Elle partage S en deux secteurs de même angle. La *droite bissectrice* de S est la droite qui supporte la demi-droite bissectrice.

Si on veut définir la bissectrice de deux droites plutôt que de deux demi-droites, alors il faut prendre garde qu'il y en a deux : une droite bissectrice *intérieure* et une droite bissectrice *extérieure* (écrivez la définition précise).

3.2 Polygones

Définition 3.2.1 Soit $n \geq 2$ un entier et $A_0, A_1, \ldots, A_n$ des points du plan E tels que trois point consécutifs ne sont pas alignés. La *ligne polygonale de sommets* A_i *et de côtés* $[A_iA_{i+1}]$, notée $\mathcal{L} = (A_0A_1 \dots A_n)$ est la suite des n segments $[A_0A_1]$, $[A_1A_2]$,... $[A_{n-1}A_n]$, pris dans cet ordre. On dit que $\mathcal{L}$ est *fermée* si $A_n = A_0$.

Définition 3.2.2 On dit qu'une ligne polygonale $\mathcal{L}$ est *simple* si elle vérifie la propriété suivante : si deux côtés de $\mathcal{L}$ ont un point d'intersection, alors ce sont deux côtés consécutifs $[A_{i-1}A_i]$ et $[A_iA_{i+1}]$ et leur intersection est réduite à leur sommet commun A_i.

Un *polygone* est une ligne polygonale fermée simple.

Dans le cas particulier où le nombre de sommets est $n = 3$ on obtient une définition du triangle équivalente à celle déjà donnée (2.2.1(4)). Le cas du triangle est très particulier car si A, B, C ne sont pas alignés alors une ligne polygonale entre ces points est forcément simple. Une autre particularité des triangles est qu'ils n'ont pas de diagonales :

Définition 3.2.3 On appelle *diagonale* d'un polygone $\mathcal{P}$ un segment $[A_iA_j]$ entre deux sommets, qui n'est pas un côté.

En général la définition de l'intérieur donnée dans 2.2.1(4) n'a pas de sens pour les polygones quelconques (essayez d'adapter la définition et testez-la sur des exemples pour voir que ce n'est pas simple !). Ceux pour lesquels elle fonctionne encore sont appelés des polygones *convexes* :

Définition 3.2.4 On dit qu'un polygone $\mathcal{P}$ est *convexe* si pour chaque côté $[A_iA_{i+1}]$, l'un des demi-plans fermés délimités par le côté (plus exactement par la droite (A_iA_{i+1})) contient $\mathcal{P}$.

On peut définir en toute généralité l'*intérieur* (et donc l'*extérieur*) d'un polygone quelconque. Ces deux zones recouvrent le plan et vérifient les propriétés qu'on en attend ([8]) : on peut rejoindre deux points de l'intérieur (ou de l'extérieur) par une courbe ou une ligne polygonale, sans franchir $\mathcal{P}$. Par contre on est obligé de franchir $\mathcal{P}$ pour joindre un point intérieur et un point extérieur.

[8]Nous admettrons ces propriétés. Leur démonstration est tout à fait à notre portée bien que non évidente, mais elle allongerait notre marche.

Voici une définition précise de ces zones : soit M un point du plan n'appartenant pas à $\mathcal{P}$. Soit δ une demi-droite d'origine M ne rencontrant aucun sommet de $\mathcal{P}$, et $\nu(M,\delta)$ le nombre de côtés de $\mathcal{P}$ que coupe δ. On montre que la parité de $\nu(M,\delta)$ est indépendante de δ.

Définition 3.2.5 On dit que M est *intérieur* à un polygone $\mathcal{P}$ ssi $\nu(M,\delta)$ est impair, et *extérieur* à $\mathcal{P}$ ssi $\nu(M,\delta)$ est pair.

Remarque 3.2.6 Il est fréquent qu'on utilise le terme « polygone » pour désigner à la fois le polygone en tant que ligne comme nous l'avons défini, ou la réunion de cette ligne (la frontière) et de l'intérieur. Le contexte ou l'énoncé permet toujours de distinguer quel sens est utilisé.

Exercice 3.2.7 Soit $\mathcal{P}$ un polygone et $\mathcal{P}^+$ la réunion du polygone et de son intérieur. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $\mathcal{P}$ est convexe

(2) pour chaque paire de points A et B sur $\mathcal{P}$, on a $[AB] \subset \mathcal{P}^+$

(3) pour chaque paire de sommets A_i et A_j, on a $[A_iA_j] \subset \mathcal{P}^+$

(4) pour chaque point M dans l'intérieur de $\mathcal{P}$, toute demi-droite δ d'origine M coupe $\mathcal{P}$ en un unique point.

(5) Les angles de $\mathcal{P}$ sont tous saillants.

3.3 Triangles

Définition 3.3.1 Soit ABC un triangle. On dit qu'il est *isocèle* s'il a au moins deux côtés de même longueur. On dit qu'il est *rectangle* s'il a un angle droit. On dit qu'il est *équilatéral* si ses trois côtés sont de même longueur.

Exercice 3.3.2 Montrez qu'un triangle est isocèle ssi il a au moins deux angles égaux. Montrez que dans un triangle équilatéral tous les angles valent un tiers de l'angle plat. Que valent les angles d'un triangle rectangle isocèle ?

Définition 3.3.3 Les *hauteurs* du triangle sont les droites passant par un sommet et perpendiculaires au côté opposé. Les *médianes* du triangle sont les droites passant par un sommet et le milieu du côté opposé.

Exercice 3.3.4 Soit ABC un triangle. Soit (AI) la médiane issue de A. Montrez que ABC est un triangle rectangle en A ssi $AI = BI = CI$.

3.4 Quadrilatères

Un quadrilatère est un polygone à quatre côtés. On distingue les quadrilatères convexes, les quadrilatères *croisés* pour lesquels deux côtés se coupent en un point autre qu'un sommet, et les quadrilatères *convexes* qui sont les autres (ni convexes ni croisés).

Définition 3.4.1 Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe.

(i) On dit que c'est un *trapèze* s'il a deux côtés opposés parallèles.

(ii) On dit que c'est un *parallélogramme* si ses côtés opposés sont parallèles. C'est la même chose de dire que ses côtés opposés sont égaux, ou encore, que les angles aux sommets opposés sont égaux, ou encore, que les diagonales se coupent en leur milieu. (Voir 3.7.5) pour l'équivalence de ces définitions.)

(iii) On dit que c'est un *rectangle* si c'est un quadrilatère avec 4 angles droits. C'est la même chose de dire que c'est un parallélogramme avec un angle droit, ou encore, un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur.

(iv) On dit que c'est un *losange* si c'est un quadrilatère avec 4 côtés égaux. C'est la même chose de dire que c'est un parallélogramme avec des diagonales perpendiculaires.

(v) On dit que c'est un *carré* si c'est un rectangle et un losange.

3.5 Vecteurs

Il y a un lien très étroit entre les parallélogrammes et d'autres objets géométriques qui sont les *vecteurs*.

Définition 3.5.1 Un *vecteur* $\vec{v}$ est un triplet constitué de : une direction (déf. 2.1.1), un sens (déf. 2.2.1) et une longueur (notée $\| \vec{v} \|$). Le *vecteur nul* noté $\vec{0}$ est une exception : il n'a ni direction ni sens, et a une longueur nulle.

Deux points A et B définissent un unique vecteur noté $\overrightarrow{AB}$. De plus on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ssi le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

Étant donné un vecteur $\vec{v}$ et un point A, on peut tracer la demi-droite δ d'origine A déterminée par la direction et le sens de $\vec{v}$. En reportant sur δ le point B tel que AB soit égal à $\| \vec{v} \|$, on obtient $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Un point B vérifiant cela est alors unique.

Il y a deux opérations importantes qu'on peut faire avec les vecteurs :

- Étant donné un vecteur $\vec{v}$ et un nombre λ, on peut définir le vecteur $\lambda\vec{v}$. Si $\lambda > 0$ ce vecteur a même direction et même sens que $\vec{v}$ et sa longueur est λ fois celle de $\vec{v}$. Si $\lambda = 0$ on pose $\lambda\vec{v} := \vec{0}$. Si $\lambda < 0$ ce vecteur a même direction que $\vec{v}$, un sens opposé, et sa longueur est $|\lambda|$ fois celle de $\vec{v}$.

- Étant donnés deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on peut définir le vecteur *somme* $\vec{v} + \vec{w}$. Pour cela on choisit trois points A, B, C tels que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{BC}$. Ensuite on définit $\vec{v} + \vec{w} := \overrightarrow{AC}$. Ainsi, par définition, la *relation de Chasles* est vérifiée :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

3.6 Isométries

Définition 3.6.1 Une *isométrie du plan* est une transformation du plan $u\colon E \to E$ qui préserve la longueur, c'est-à-dire que pour tous points A, B on a $u(A)u(B) = AB$.

Il est facile de voir qu'une isométrie u est une *bijection*, c'est-à-dire que pour tout point $N \in E$ il existe un et un seul point $M \in E$ tel que $u(M) = N$. Une autre façon de le dire est que u possède une *réciproque*, c'est-à-dire une fonction $v\colon E \to E$ telle que $u \circ v = v \circ u = \mathrm{id}_E$ (la fonction *identité* id_E est définie par $\mathrm{id}_E(M) = M$). Précisément, pour tout point $N \in E$ il existe un et un seul point $M \in E$ tel que $u(M) = N$, donc on peut définir $v(N) := M$.

Une isométrie conserve les longueurs, les milieux, l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité, les angles non orientés. Il y a 4 types d'isométries, que nous allons maintenant décrire.

Définitions 3.6.2 (i) Soit $\mathcal{D}$ une droite. Définissons la *réflexion (ou symétrie) d'axe* $\mathcal{D}$ notée $s_{\mathcal{D}}$. Soit M un point du plan, on considère la perpendiculaire Δ à $\mathcal{D}$ passant par M et O son point d'intersection avec $\mathcal{D}$. Reportant la longueur OM sur Δ de l'autre côté de $\mathcal{D}$, on obtient un point M' et on pose $s_{\mathcal{D}}(M) := M'$.

(ii) Soit $\vec{v}$ un vecteur. Définissons la *translation de vecteur* $\vec{v}$ notée $t_{\vec{v}}$. Soit M un point, comme on l'a vu plus haut il existe un unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$. On pose $t_{\vec{v}}(M) := M'$.

(iii) Soient $\vec{v}$ un vecteur et $\mathcal{D}$ une droite dans la direction de $\vec{v}$. On définit la *symétrie glissée de vecteur* $\vec{v}$ *et d'axe* $\mathcal{D}$ par $\sigma_{\vec{v},\mathcal{D}} := t_{\vec{v}} \circ s_{\mathcal{D}}$.

Exercice 3.6.3 (1) Soit $\vec{u}$ un vecteur et $\mathcal{D}$ une droite perpendiculaire à la direction de $\vec{u}$. Soit $\mathcal{D}' := t_{\vec{u}}(\mathcal{D})$ et t la transformation $s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}}$. Montrez qu'il s'agit d'une translation. Quel est le vecteur qui la définit ?

(2) Soient δ_1 et δ_2 deux demi-droites de même origine O. Soient D leur droite bissectrice et D_1 la droite qui supporte δ_1. Soit la transformation $r := s_{D_1} \circ s_D$. Montrez que $r(O) = O$ (le point O est *fixe* par r) et que $r(\delta_1) = \delta_2$.

L'exercice 3.6.3(2) ci-dessus nous indique que la composée de deux réflexions d'axes se coupant en O est une rotation de centre O (nous n'avons pas encore rappelé ce qu'est une rotation). Comme il est plus naturel de définir une rotation à l'aide d'un angle orienté, nous allons définir cette notion au préalable.

Définitions 3.6.4 (i) Un secteur angulaire *orienté* est donné par un secteur angulaire *et* un ordre entre les demi-droites qui le délimitent.

(ii) Soient S_1 et S_2 deux secteurs angulaires orientés. On peut translater S_2 pour que son origine coïncide avec celle de S_1 puis une transformation r comme dans l'exercice 3.6.3(2), de sorte que sa première demi-droite coïncide avec celle de S_1. Alors on dit que les secteurs ont *la même orientation* si $S_1 \subset S_2$ ou $S_2 \subset S_1$.

(iii) Le choix d'un secteur angulaire orienté non nul et non plein définit une *orientation du plan.* Si on place un cadran de montre dans le plan, le *sens trigonométrique* est l'orientation donnée par le secteur orienté depuis « 1 heure » vers « midi » (sens inverse des aiguilles d'une montre). $\square$

Dans toute la suite, supposons fixée une fois pour toutes une orientation du plan, que nous appellerons *positive*. (Par exemple le sens trigonométrique.) Étant donné un secteur orienté S, on en déduit une orientation pour son angle.

Soit S un secteur angulaire orienté, θ l'angle orienté qu'il définit, et O un point. On veut maintenant définir la rotation de centre O et d'angle θ. Soit M un point du plan. D'aprés l'axiome (Ang1), de chaque côté de la demi-droite $[OM)$ on peut reporter une demi-droite δ formant un secteur d'angle θ avec $[OM)$. On considère celle des deux qui a la même orientation que S et on considère le point $M' \in \delta$ tel que $OM' = OM$.

Définition 3.6.5 Soit S un secteur angulaire orienté, θ l'angle orienté qu'il définit, et O un point. On définit la *rotation de centre O et d'angle θ* notée $r_{O,\theta}$, en posant $r_{O,\theta}(M) = M'$ comme défini ci-dessus.

On peut démontrer qu'on a ainsi défini les quatre seuls types d'isométries du plan : réflexions, translations, symétries glissées et rotations. On a aussi montré, avec les exercices, que toutes sont des composées de réflexions. Précisément, mises à part les réflexions elles-mêmes,

- les translations sont les composées de 2 réflexions d'axes parallèles,
- les rotations sont les composées de 2 réflexions d'axes concourants, et
- les symétries glissées sont les composées de trois réflexions, deux d'axes concourants et la troisième d'axe sécant aux deux autres.

Voilà une autre façon de classer les isométries : si l'ensemble de ses points fixes est...

- vide, l'isométrie est une translation ou une symétrie glissée,
- une droite, l'isométrie est une réflexion, et si c'est
- un point, l'isométrie est une rotation.

3.7 Angles des secteurs opposés, alternes-internes, alternes-externes, correspondants

Proposition 3.7.1 *Deux secteurs angulaires opposés, alternes-internes, alternes-externes ou correspondants ont même angle.*

Démonstration : Référons-nous à la figure de la définition 2.5.4. Alors la proposition est immédiate car deux secteurs opposés $[\widehat{AOC}]$ et $[\widehat{BOO'}]$ sont symétriques par la symétrie de centre O ; deux secteurs alternes-internes $[\widehat{BOO'}]$ et $[\widehat{A'O'O}]$ sont symétriques par la symétrie de centre I, milieu de $[OO']$; deux secteurs alternes-externes $[\widehat{AOC}]$ et $[\widehat{C'O'B'}]$ sont aussi symétriques par la symétrie de centre I ; enfin deux secteurs correspondants $[\widehat{BOO'}]$ et $[\widehat{B'O'C'}]$ sont translatés par la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$. $\square$

Proposition 3.7.2 *La somme des angles d'un triangle est égale à l'angle plat* ([9]).

[9] Rappelons qu'autant que possible, on évite d'utiliser les réels, et en particulier le nombre π.

Démonstration : Soit ABC un triangle et α, β, γ les angles en A, B, C. Considérons la parallèle Δ à (AB) passant par C, et A' (resp. B') un point de Δ situé du même côté de (CB) que A (resp. du même côté de (CA) que B). Soient $\alpha := \widehat{ACA'}$ et $\beta' := \widehat{BCB'}$. Alors $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$, car ils sont alternes-internes. Donc $\alpha+\beta+\gamma = \alpha'+\beta'+\gamma$ qui est un angle plat. $\square$

Corollaire 3.7.3 *Deux droites orthogonales à une même troisième sont parallèles.*

Démonstration : Soient D et D' droites orthogonales en O et O' à Δ. Supposons qu'elles aient un point commun M. La somme des angles du triangle OMO' est égale à un angle plat (proposition 3.7.2) d'où on déduit que $\widehat{OMO'} = 0$, ce qui est impossible. $\square$

Corollaire 3.7.4 *La somme des angles d'un polygone à n côtés est égale à $(n-2)$ angles plats.*

Démonstration : Pour simplifier nous démontrons la proposition dans le cas d'un polygone convexe. Dans ce cas, considérons un point O intérieur au polygone, et traçons les n segments qui le relient aux sommets. On obtient un découpage du polygone en n triangles. La somme des angles de ces triangles (soit n angles plats d'après la proposition 3.7.2) est égale à la somme des angles du polygone, plus la somme des angles de sommet O, égale à 2 angles plats (un angle plein). Finalement la somme des angles du polygone est égale à $(n-2)$ angles plats. $\square$

Exercice 3.7.5 Démontrez que les différentes définitions d'un parallélogramme sont équivalentes : côtés opposés parallèles, ou côtés opposés égaux, ou angles aux sommets opposés, ou diagonales se coupant en leur milieu.

4 Thalès, Pythagore et applications

4.1 Les théorèmes de Thalès et Pythagore

Théorème 4.1.1 (Pythagore) *Soit ABC un triangle rectangle en A. Alors on a :*

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

Démonstration : Soit $a := BC$, $b := AC$, $c := AB$. Soit $A_1A_2A_3A_4$ un carré de côté égal à $b + c$ et de centre O, et $B_1 \in [A_1A_2]$, $B_2 \in [A_2A_3]$,... tels que $A_iB_i = AB$ pour $i = 1, 2, 3, 4$. Il est clair que les quatre triangles $A_1B_1B_4$, $A_2B_2B_1$,... sont tous isométriques à ABC, et c'est un exercice facile que de voir que $B_1B_2B_3B_4$ est un carré de côté a. En calculant l'aire de $A_1A_2A_3A_4$ par découpage on a

$$(a + b)^2 = c^2 + 2ab$$

dont on déduit que $a^2 + b^2 = c^2$. $\square$

Le théorème de Pythagore est fondamental et a un nombre incalculable de conséquences en Géométrie. L'une d'elles concerne les remarquables propriétés d'*équidistance* des médiatrices et bissectrices. Pour énoncer ces propriétés nous avons besoin de la notion de *distance d'un point* M à une droite (AB) : étant donné $H = \pi_{(AB)}(M)$ le projeté orthogonal de M sur la droite, cette distance est par définition la longueur MH. C'est la plus petite des longueurs MC lorsque C appartient à (AB), car d'après le théorème de Pythagore on a $MC = \sqrt{MH^2 + HC^2} \geq MH$. L'exercice suivant donne les propriétés d'équidistance en question :

Exercice 4.1.2 Montrez que la médiatrice d'un segment $[AB]$ est l'ensemble des points à égale distance de A et B. Montrez que la bissectrice d'un secteur $[\delta_1, \delta_2]$ est l'ensemble des points à égale distance de δ_1 et δ_2.

Nous allons maintenant démontrer le théorème de Thalès qui établit un lien étroit entre paralélisme et proportions. L'exercice facile suivant sera utile.

Exercice 4.1.3 Soient x_1, y_1, x_2, y_2 des nombres réels non nuls, avec $y_1 + y_2$ également non nul. Si $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ alors c'est aussi égal à $\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$.

Pour démontrer le théorème de Thalès on le démontre d'abord dans le cas particulier :

Lemme 4.1.4 *Soit ABC un triangle rectangle en B. Soient $B' \in (AB)$, $C' \in (AC)$ tels que $(B'C')$ est parallèle à (BC). Alors on a*

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$$

Démonstration : Supposons que $B' \in [AB]$ et $C' \in [AC]$ pour ne pas nous ennuyer avec les signes des mesures algébriques. Le raisonnement dans les autres cas est tout à fait similaire.
Nous allons montrer d'abord que $\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$. La parallèle à (BC) passant par A et la parallèle à (AB) passant par C se coupent en un point D. La parallèle à (AB) passant par C' coupe (AD) en E et (BC) en F. Enfin appelons G l'intersection de $(B'C')$ et (CD). Ainsi le quadrilatère $ADCB$ est un rectangle. Les triangles suivants sont isométriques : FCC' et GCC'; AEC' et $AB'C'$; et bien sûr ABC et ADC. Donc

$$\mathcal{A}(BFC'B') + \mathcal{A}(FCC') + \mathcal{A}(AB'C') = \mathcal{A}(EDGC') + \mathcal{A}(GCC') + \mathcal{A}(AEC')$$

d'où $\mathcal{A}(BFC'B') = \mathcal{A}(EDGC')$. En ajoutant l'aire du rectangle $AEC'B'$ on a $\mathcal{A}(AEFB) = \mathcal{A}(ADGB')$, donc $AB \times B'C' = AB' \times BC$, c'est ce qu'on voulait. Montrons maintenant qu'on a aussi $\frac{AC'}{AC} = \frac{AB'}{AB}$. D'après ce qu'on vient de montrer et l'exercice 4.1.3,

$$\frac{(AB')^2}{AB^2} = \frac{(B'C')^2}{BC^2} = \frac{(AB')^2 + (B'C')^2}{AB^2 + BC^2} = \frac{(AC')^2}{AC^2}$$

en utilisant Pythagore. En prenant la racine carrée on obtient le résultat. □

Théorème 4.1.5 (Thalès) *Soit ABC un triangle quelconque. Soient $B' \in (AB)$, $C' \in (AC)$ tels que $(B'C')$ est parallèle à (BC). Alors on a*

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$$

Démonstration : Ici encore on suppose que $B' \in [AB]$ et $C' \in [AC]$ pour ne pas nous ennuyer avec les signes. On trace la hauteur issue de A et on appelle D, D' ses points d'intersection avec (BC) et $(B'C')$. Supposons que ces points D, D' sont intérieurs au triangle (dans le cas contraire, le raisonnement serait analogue). D'après le lemme, utilisé dans les triangles rectangles ADB et ACD,

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AD'}{AD} = \frac{AC'}{AC}$$

et d'autre part (utilisant l'exercice 4.1.3)

$$\frac{AD'}{AD} = \frac{B'D'}{BD} = \frac{D'C}{DC} = \frac{B'D' + D'C}{BD + DC} = \frac{B'C'}{BC}$$

□

4.2 Droites concourantes dans les triangles

Proposition 4.2.1 *Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point O appelé* centre du cercle circonscrit *du triangle.*

Démonstration : On utilise la description des médiatrices donnée dans 4.1.2. Soit A, B, C les sommets du triangle et $\mathcal{D}_A$, $\mathcal{D}_B$, $\mathcal{D}_C$ les médiatrices (resp. de $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$). Soit O l'intersection de $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_B$. On a donc $OB = OC$ et $OC = OA$. Donc $OB = OA$ c'est-à-dire que $O \in \mathcal{D}_C$. □

Proposition 4.2.2 *Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point I appelé* centre du cercle inscrit *du triangle.*

Démonstration : On utilise encore 4.1.2. Soit A, B, C les sommets du triangle et $\mathcal{B}_A$, $\mathcal{B}_B$, $\mathcal{B}_C$ les bissectrices (resp. en A, B et C). Soit I l'intersection de $\mathcal{B}_A$ et $\mathcal{B}_B$. Ainsi I est à égale distance de (AB) et (AC) d'une part, et de (AB) et (BC), d'autre part. Donc I est à égale distance de (AC) et (BC), c'est-à-dire que $I \in \mathcal{B}_C$. □

Proposition 4.2.3 *Soit $\mathcal{T} = ABC$ un triangle. On lui associe un nouveau triangle $\mathcal{T}^*$ défini comme suit. On trace la parallèle à (BC) passant par A qui coupe la parallèle à (AC) passant par B en C^* et la parallèle à (AB) passant par C en B^*; ces deux dernières se coupent elles en A^*. On pose $\mathcal{T}^* := A^*B^*C^*$.*

(1) *Les médianes de $\mathcal{T}$ et celles de $\mathcal{T}^*$ sont les mêmes.*

(2) *Les hauteurs de $\mathcal{T}$ sont les médiatrices de $\mathcal{T}^*$.*

Démonstration : On observe que comme $ACBC^*$, AB^*CB, ACA^*B sont des parallélogrammes, leurs diagonales se coupent en leur milieu donc les droites (AA^*), (BB^*), (CC^*) sont les médianes de $\mathcal{T}$. D'autre part utilisant les mêmes parallélogrammes on a $C^*A = BC = AB^*$, et de même sur les autres côtés de $\mathcal{T}^*$. Ainsi A est le milieu de $[B^*C^*]$, B est le milieu de $[A^*C^*]$, C est le milieu de $[A^*B^*]$. Donc les droites (AA^*), (BB^*), (CC^*) sont aussi les médianes de $\mathcal{T}^*$.
Il est alors clair que la hauteur de $\mathcal{T}$ issue de A est la médiatrice de $[B^*C^*]$, et idem sur les autres côtés de $\mathcal{T}^*$. C'est le point (2). □

Proposition 4.2.4 *Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point G appelé* centre de gravité *du triangle. Ce point est situé aux $2/3$ de chaque médiane, par exemple, si (AA') est la médiane en un sommet A on a : $AG = \frac{2}{3}AA'$.*

Démonstration : Soit $\mathcal{T} = ABC$ un triangle et considérons le triangle $\mathcal{T}^*$ de la proposition 4.2.3. Soit G l'intersection de (AA^*) et (BB^*), deux des médianes de $\mathcal{T}$. D'après le théorème de Thalès on a

$$\frac{GA^*}{GA} = \frac{GB^*}{GB} = \frac{A^*B^*}{AB} = 2$$

On introduit l'homothétie h de centre G et de rapport -2, de sorte que $h(A) = A^*$ et $h(B) = B^*$. L'image par h de (BC) est une parallèle à (BC) et passant par $h(B) = B^*$, donc c'est (B^*C^*). De même l'image par h de (AC) est une parallèle à (AC) et passant par $h(A) = A^*$, donc c'est (A^*C^*). Donc l'image de $(BC) \cap (AC)$ est $(B^*C^*) \cap (A^*C^*)$, i.e. $h(C) = C^*$. En particulier G, C et C^* sont alignés, donc G est situé sur la troisième médiane. Pour la propriété des $2/3$ soit A' le milieu de $[BC]$, on a vu au fil de la démonstration que $AA^* = 3GA = 2AA'$. □

Proposition 4.2.5 *Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H appelé* orthocentre *du triangle.*

Démonstration : Soit $\mathcal{T} = ABC$ un triangle. D'après la proposition 4.2.3 les trois hauteurs de $\mathcal{T}$ sont les trois médiatrices de $\mathcal{T}^*$, et donc d'après 4.2.1 elles sont concourantes. □

Proposition 4.2.6 (Droite d'Euler) *Dans un triangle, le centre du cercle circonscrit O, le centre de gravité G et l'orthocentre H sont alignés sur une droite appelée la* droite d'Euler *du tiangle. De plus on a $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$.*

Démonstration : On reprend les notations $\mathcal{T} = ABC$, $\mathcal{T}^* = A^*B^*C^*$ et h l'homothétie h de centre G et de rapport -2. Celle-ci envoie les médiatrices de $\mathcal{T}$ sur les médiatrices de $\mathcal{T}^*$, donc envoie le centre du cercle circonscrit O sur le centre du cercle circonscrit O^* de $\mathcal{T}^*$. Comme les médiatrices de $\mathcal{T}^*$ sont les hauteurs de $\mathcal{T}$ (proposition 4.2.3) on a $O^* = H$. Donc $h(O) = H$, on en déduit que G, H, O sont alignés et que $GH = 2GO$. □

4.3 Trigonométrie des angles

On suppose toujours fixée une orientation du plan, que nous appelons *positive*. Pour fixer les idées choisissons le sens trigonométrique pour sens positif. Le théorème de Thalès permet de définir le *cosinus*, le *sinus* et d'autres quantités trigonométriques associées aux angles.

Considérons un secteur angulaire orienté $S = [\delta_1, \delta_2]$, d'origine O, et θ l'angle orienté qu'il définit. Soit δ_3 la demi-droite telle que l'angle de $[\widehat{\delta_1, \delta_2}]$ soit un angle droit positif. Soit $R > 0$ quelconque et traçons un cercle centré en O et de rayon R. Soit M_R le point d'intersection du cercle avec δ_2, C_R son projeté orthogonal sur δ_1, S_R son projeté orthogonal sur δ_3. Par le théorème de Thalès, les différents rapports présents dans la définition qui suit sont indépendants de R.

Définition 4.3.1 Soit $S = [\delta_1, \delta_2]$ et θ l'angle orienté qu'il définit. Avec les notations ci-dessus, on définit

(1) le *cosinus* $\cos(\theta) := \overline{OC}_R / \overline{OM}_R$

(2) le *sinus* $\sin(\theta) := \overline{OS}_R / \overline{OM}_R$

(3) la *tangente* $\tan(\theta) := \overline{OS}_R / \overline{OC}_R$ est définie lorsque $C_R \neq O$.

(4) la *cotangente* $\operatorname{cotan}(\theta) := \overline{OC}_R / \overline{OS}_R$ est définie lorsque $S_R \neq O$.

Comme les définitions sont indépendantes de R, le plus souvent on calcule ces quantités en utilisant le cercle de longueur 1 unité.

On peut alors définir le *produit scalaire* de deux vecteurs :

Définition 4.3.2 Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel défini par

- $\vec{u}.\vec{v} := 0$ si l'un des deux vecteurs est nul,
- $\vec{u}.\vec{v} := \| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \cos(\vec{u}, \vec{v})$ sinon.

(Si l'un des deux vecteurs est nul, l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ n'est pas défini.)

On peut donner une autre description du produit scalaire : lorsque $\vec{u} = \overrightarrow{MA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{MB}$, appelons H le projeté orthogonal de B sur la droite (MA). Il est facile de voir que

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overline{MA} \times \overline{MH}$$

Proposition 4.3.3 *Le produit scalaire vérifie : pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,*

(i) $(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$

(ii) $(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$

(iii) $\vec{u}.\vec{v} = 0$ *ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.*

Démonstration : Les propriétés sont relativement évidentes, sauf peut-être la deuxième. Pour la démontrer choisissons des points A, B, C, D tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$. Alors $\vec{u}+\vec{v}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AE}$, où E est le point tel que $ACEB$ est un parallélogramme. Appelons H, K, L les projetés orthogonaux de B, C, D sur (AH). Comme $ACEB$ est un parallélogramme on vérifie facilement que $\overline{AH} = \overline{KL}$. Il en découle que

$$\overline{AD} \times \overline{AL} = \overline{AD} \times (\overline{AK} + \overline{KL}) = \overline{AD} \times \overline{AK} + \overline{AD} \times \overline{AH}$$

c'est-à-dire exactement $(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$. □

5 Périmètre du cercle et aire du disque

Dans ce dernier paragraphe, nous décrivons le lien entre le périmètre du cercle et l'aire du disque. Pour cela nous définissons rigoureusement la notion de longueur pour une courbe quelconque tracée dans le plan. En revanche, pour ce qui concerne la notion d'aire, pour ne pas nous écarter trop du programme nous devrons nous contenter de notre conception intuitive.

5.1 Longueurs de courbes

L'idée est de définir la longueur d'une courbe générale en l'approximant avec des lignes polygonales. Soit $\mathcal{C}$ une courbe bornée. On dit qu'une ligne polygonale $\mathcal{L} = (A_0A_1 \dots A_n)$ est *inscrite dans* $\mathcal{C}$ si chaque sommet A_i est un point de $\mathcal{C}$ et que l'ordre des points respecte l'ordre de parcours de $\mathcal{C}$. La plus grande des longueurs A_iA_{i+1} est appelée le *pas* de la ligne polygonale. On définit la longueur d'une ligne polygonale par : $\ell(\mathcal{L}) := A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$.

Définition 5.1.1 La *longueur de* $\mathcal{C}$, notée $\ell(\mathcal{C})$, est la limite (si elle existe) des longueurs des lignes polygonales inscrites dans $\mathcal{C}$, lorsque le pas tend vers 0.

Lorsqu'on « rafine » une ligne polygonale inscrite dans $\mathcal{C}$ en augmentant le nombre de sommets, on voit en utilisant le théorème de Pythagore que sa longueur augmente. (En d'autres termes, le théorème de Pythagore nous apprend que la ligne droite est le chemin le plus court entre deux points.)

Proposition 5.1.2 (1) *Soit u une isométrie, alors $\ell(u(\mathcal{C})) = \ell(\mathcal{C})$.*

(2) *Soit h une homothétie de rapport λ, alors $\ell(h(\mathcal{C})) = |\lambda|\ell(\mathcal{C})$.*

Démonstration : Soit $\mathcal{L}$ une ligne polygonale inscrite sur $\mathcal{C}$. Alors $\ell(u(\mathcal{L})) = \ell(\mathcal{L})$ et $\ell(h(\mathcal{L})) = |\lambda|\ell(\mathcal{L})$ car cela est vrai pour les segments. En passant à la limite, on obtient le résultat. □

5.2 Lien entre le périmètre du cercle et l'aire du disque

On doit aux géomètres Grecs le calcul de l'aire du disque, qui établit un lien spectaculaire entre cette aire et le périmètre du cercle, c'est-à-dire essentiellement le nombre π. Ce résultat est d'autant plus remarquable que, comme on l'a dit plusieurs fois, les relations entre nombres et longueurs étaient pour le moins fumeuses à leur époque, faute d'avoir les nombres réels.

Décrivons leur démonstration de la formule $\mathcal{A}(\mathcal{D}_R) = \pi R^2$. Par homogénéité de l'aire, il suffit de la démontrer pour le rayon $R = 1$.

Théorème 5.2.1 *L'aire du cercle de rayon 1 est égale à π.*

Démonstration : Plaçons, sur un cercle de centre O et de rayon 1, les n sommets $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'un polygone régulier $\mathcal{P}_n$ à n côtés. Chacun des angles $(\overrightarrow{OA}_n, \overrightarrow{OA}_{n+1})$ est égal à $2\pi/n$ modulo 2π. Soit B_n le milieu de $[A_nA_{n+1}]$. Le périmètre du polygone est n fois la longueur A_nA_{n+1}

$$p_n = n \times 2\sin(\frac{\pi}{n})$$

Par ailleurs d'après la définition 5.1.1 on sait que p_n tend vers le périmètre du cercle, i.e. 2π, quand n tend vers l'infini. Quand à l'aire de $\mathcal{P}_n$ elle vaut n fois celle du triangle OA_nA_{n+1} donc

$$a_n = n \times \cos(\frac{\pi}{n})\sin(\frac{\pi}{n}) = \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{n})p_n$$

On admet que l'aire de $\mathcal{P}_n$ tend vers l'aire du cercle lorsque n tend vers l'infini. Comme $\cos(\frac{\pi}{n})$ tend vers 1, et p_n tend vers 2π, en passant à la limite dans l'expression de l'aire on a donc $\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \pi$. □

A Annexe : Le plan euclidien assimilé à $\mathbb{R}^2$

Si on s'autorise à utiliser les nombres réels sans modération, un autre point de vue sur la Géométrie plane est de considérer que le plan euclidien est (par définition, si on veut) l'ensemble $E := \mathbb{R}^2$ des couples de nombres réels.

Cette présentation se démarque de façon essentielle de celle développée par Euclide par le fait qu'on ne s'embarrasse plus pour justifier que la géométrie que l'on fait « colle » bien à la réalité. En contrepartie on peut *définir* tous les concepts qu'on étudie (points, droites, longueurs, angles...) et on n'a pas besoin de *postuler* qu'ils existent.

Dans cette annexe, nous rappelons comment sont définis, sous ce nouvel éclairage, les principaux concepts que nous avons passés en revue au long du cours.

A.1 Les points de $\mathbb{R}^2$ et le repère canonique

Un point $M \in E$ est donc donné par deux réels x, y qui sont ses *coordonnées.* On le note $M(x, y)$. Deux points sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales.

A.1.1 Vecteurs. Un vecteur $\vec{u}$ est donné par deux réels a, b qui sont ses coordonnées. On le note $\vec{u}(a, b)$. Cela peut sembler être la même chose qu'un point, mais il faut penser à un vecteur plutôt comme une « différence de points ». Ainsi deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ déterminent un unique vecteur, noté $\overrightarrow{AB}$, dont les coordonnées sont $(x_B - x_A, y_B - y_A)$. D'autres points C et D peuvent déterminer le même vecteur, précisément, on a $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ si et seulement si $x_D - x_C = x_B - x_A$ et $y_D - y_C = y_B - y_A$.

Le *vecteur nul* est le vecteur $\overrightarrow{0}$ de coordonnées $(0, 0)$. Le vecteur somme de $\vec{u}(a, b)$ et $\vec{u}\,'(a', b')$ est le vecteur $\vec{u} + \vec{u}\,'$ de coordonnées $(a + a', b + b')$. Par ailleurs, étant donné un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$, on peut définir le vecteur $\lambda\vec{u}$ qui est le vecteur de coordonnées $(\lambda a, \lambda b)$.

Étant donnés deux vecteurs $\vec{u}(a, b)$ et $\vec{u}\,'(a', b')$ on peut définir leur *produit scalaire* noté $\vec{u}.\vec{u}'$ et leur *déterminant* noté $\det(\vec{u}, \vec{u}\,')$. Ce sont tous deux des nombres réels, ils sont définis par :

- $\vec{u}.\vec{u}\,' := aa' + bb'$
- $\det(\vec{u}, \vec{u}\,') := ab' - ba'$

On dit que $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$ sont *orthogonaux* ssi $\vec{u}.\vec{u}\,' = 0$, et *colinéaires* ssi $\det(\vec{u}, \vec{u}\,') = 0$.

(Choisissons deux droites quelconques $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$, voir § A.2 ci-dessous. Alors c'est la même chose de dire que $\vec{u}.\vec{u}\,' = 0$ ou que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonales, et c'est la même chose de dire que $\det(\vec{u}, \vec{u}\,') = 0$ ou que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.)

A.1.2 Repère canonique. Dans $\mathbb{R}^2$ il y a trois points particulièrement importants : l'origine $O(0, 0)$ et les points $I(1, 0)$ et $J(0, 1)$. Ces points déterminent des vecteurs $\vec{\imath} := \overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath} := \overrightarrow{OJ}$ qu'on appelle les *vecteurs canoniques.* Le *repère canonique* est le triplet $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ composé de l'origine et des deux vecteurs canoniques.

Le repère canonique permet de représenter tous les vecteurs comme sommes de la forme $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$, et donc tous les points $M(x, y)$ par l'écriture : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

A.2 Droites, demi-droites, segments

A.2.1 Représentations paramétriques. Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points distincts du plan. La droite (AB) est l'ensemble des points $M(x, y)$ avec $x = x(t)$ et $y = y(t)$ tels que

$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

On dit que t est le *paramètre de M sur la droite*, dans le repère formé par A et B. Par exemple, A est le point de paramètre $t=0$ et B est le point de paramètre $t=1$. La demi-droite $[AB)$ est l'ensemble des points $M(x(t), y(t))$ comme ci-dessus, avec $t \geq 0$. Le segment $[AB]$ est l'ensemble des points $M(x(t), y(t))$ comme ci-dessus, avec $0 \leq t \leq 1$.

A.2.2 Équations. Une autre manière de décrire une droite (AB) est d'en donner une équation : c'est l'ensemble des points M dont les coordonnées vérifient une équation $ax + by + c = 0$, avec a et b non tous les deux nuls.

On peut donner explicitement une équation de (AB) en fonction des coordonnées de A et B, à savoir l'équation $(x_B - x_A)(y - y_A) = (y_B - y_A)(x - x_A)$.

Étant donnée une droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$, un vecteur directeur pour $\mathcal{D}$ est le vecteur $\vec{u}(-b, a)$. Bien sûr, n'importe quel vecteur $\lambda\vec{u}$ avec $\lambda \neq 0$ est aussi un vecteur directeur.

A.2.3 Coefficients directeurs. Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points distincts. Si $x_B \neq x_A$ on appelle *coefficient directeur* (ou *pente*) de la droite (AB) le nombre $m := \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ et on met en général l'équation sous la forme $y = mx + p$.

Soient deux droites d'équations $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$. Elles sont parallèles ssi $m = m'$, et orthogonales ssi $mm' = -1$.

Exercice A.2.4 Redémontrez la dernière affirmation sur le parallélisme et l'orthogonalité en trouvant des vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ pour les deux droites, et en traduisant ces conditions sur $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

A.3 Longueurs

Définition A.3.1 Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan. On définit la *longueur* du segment $[AB]$ comme étant égale à $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Supposons que la longueur AB soit égale à 1. Alors, pour tout point $M \in (AB)$ repéré par son paramètre t (voir A.2.1), il est facile de vérifier que la longueur AM est égale à $|t|$.

Remarque A.3.2 Cette définition semble, bien sûr, justifiée par le théorème de Pythagore. Mais il faut bien comprendre que dans cette présentation de la géométrie plane, opposée à celle d'Euclide, on ne peut pas vraiment démontrer le théorème de Pythagore, car une égalité telle que $BC^2 = AB^2 + AC^2$ aura forcément lieu, par définition de la longueur !