Correction de l'exercice donné au dernier cours

Exercice : Soit ABC un triangle et $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$. Montrez que

$$ABC \text{ est rectangle en } C \quad \Leftrightarrow \quad C \text{ appartient à } \mathscr{C}$$

(on pourra utiliser la condition de cocyclicité).

Correction : Soit O le milieu de $[AB]$, Δ la médiatrice de $[AB]$, et I l'un des deux points de Δ tels que $OI = OA = OB$. Il est facile de voir que le triangle AIB est rectangle en I, ou, dit en termes d'angles orientés :

$$(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = \pi/2 \ (2\pi) \qquad \text{ou} \qquad (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = -\pi/2 \ (2\pi)$$

Comme $-\pi/2 = \pi/2 \ (\pi)$, on peut résumer ces deux possibilités en une seule :

$$(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = \pi/2 \ (\pi)$$

Par conséquent, d'après la condition de cocyclicité,

$$\begin{aligned} \text{ABC est rectangle en } C \quad & \text{ssi } (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \pi/2 \ (\pi) \\ & \text{ssi } (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) \ (\pi) \\ & \text{ssi } C,\ A,\ B,\ I \text{ sont cocycliques} \\ & \text{ssi } C \in \mathscr{C}. \end{aligned}$$