Exercice 1

1. Un nombre entier relatif pair est un nombre $n \in \mathbb{Z}$ tel qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$.
Un nombre entier relatif impair est un nombre $n \in \mathbb{Z}$ tel qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$, et posons $N := n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$. Selon la valeur du reste de la division euclidienne de n par 3, on a trois possibilités :

- $n \equiv 0\ (3)$, dans ce cas le facteur n (dans l'écriture de N) est divisible par 3.
- $n \equiv 1\ (3)$, dans ce cas $n + 2 \equiv 0\ (3)$ donc le facteur $n + 2$ est divisible par 3.
- $n \equiv 2\ (3)$. dans ce cas $n + 1 \equiv 0\ (3)$ donc le facteur $n + 1$ est divisible par 3.

Dans tous les cas, N est divisible par 3.

De même, selon la valeur du reste de la division euclidienne de n par 5, on a cinq possibilités (qui sont : n congru à 0, 1, 2, 3 ou 4 respectivement) et dans chaque cas l'un des facteurs de N (le facteur n, $n + 4$, $n + 3$, $n + 2$, $n + 1$, respectivement) est divisible par 5. Donc N est divisible par 5.

On a donc $3|N$ et $5|N$. Comme 3 et 5 sont premiers entre eux, par un résultat du cours, leur produit 15 divise N.

Compléments :

a. *Le même raisonnement démontre le fait que parmi k entiers consécutifs, au moins un est divisible par k. (Donc, $n(n + 1) \dots (n + k - 1)$ est divisible par k.)*

b. *On peut être plus fin en regardant les restes modulo 2, 3, 4, 5. (...) On montre ainsi que 120 divise $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)(n + 4)$.*

Exercice 2

1. Le théorème de décomposition en facteurs premiers des entiers naturels affirme que : pour tout entier naturel $n \geq 2$, il existe un entier $r \geq 1$, des nombres premiers $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ et des entiers naturels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ supérieurs ou égaux à 1, tels que $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$. Ces nombres r, p_i, α_i sont uniques.

2. Le nombre de zéros à la fin de l'écriture décimale de $n = 30!$ est donné par la plus grande puissance de 10 qui divise n. (En effet, s'il y a k zéros à la fin de l'écriture en base dix

$$n = 10^m a_m + 10^{m-1} a_{m-1} + \cdots + 10 a_1 + a_0$$

c'est que $n = 10^m a_m + 10^{m-1} a_{m-1} + \cdots + 10^k a_k$. Donc 10^k divise n.)

Les facteurs premiers de 10 sont 2 et 5, donc pour trouver cette puissance de 10, il suffit de regarder la plus grande puissance de 2, notons-la 2^α, et la plus grande puissance de 5, notons-la 5^β, qui divisent n. Il suffit même de trouver le plus petit des nombres α et β, car alors (par exemple dans le cas où $\beta \leq \alpha$) on aura $2^\alpha 5^\beta = 2^{\alpha-\beta} 2^\beta 5^\beta = 2^{\alpha-\beta} 10^\beta$ (et le facteur 10 n'apparaît nulle part ailleurs car le facteur 5 n'apparaît plus).

Parmi les nombres de 1 à 30, ceux qui contiennent un facteur 5 sont 5, $10 = 2 \times 5$, $15 = 3 \times 5$, $20 = 4 \times 5$, $25 = 5^2$ (avec exposant 2) et $30 = 6 \times 5$. Donc dans la décomposition en facteurs premiers de n la plus grande puissance de 5 est 5^7. Il est clair que la plus grande puissance de 2 est au moins 2^7 car les nombres 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 apportent chacun un facteur 2. Donc, il y a 7 zéros à la fin de l'écriture décimale de n.

Compléments :

a. *Ceux qui ont compté toutes les apparitions de 2 ont dû trouver 2^{26}. Dans $2^{26} \times 5^7 = 10^7 \times 2^{19}$ la puissance de 10 recherchée est bien 10^7.*

b. *Le nombre* 30! *a 32 chiffres donc le calculer n'est pas vraiment une solution...*

3. Soit un entier naturel d'écriture décimale $x = \overline{kkk}_{(\mathsf{dix})}$ (avec $1 \leq k \leq 9$). Cela veut dire que $x = k \times 10^2 + k \times 10 + k = 111k$. Or, on a $111 = 3 \times 37$ donc $x = 3 \times 37 \times k$, donc, 37 divise x.

4. On considère $n = 30!$ et $x = 3 \times k \times 37$. Comme $1 \leq k \leq 9$, on a $3k \leq 27$ donc le nombre $3k$ est un des facteurs de n. Donc, $3k$ divise n, i.e. il existe $n' \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3kn'$.

Par ailleurs, comme tous les facteurs premiers qui apparaissent dans la décomposition en facteurs premiers de n sont ≤ 30, le nombre 37 n'apparaît pas. (Le nombre 37 est premier car pour s'en assurer il suffit de tester la divisibilité par les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{37}$, or $\sqrt{37} < 7$ et 37 n'est divisible par aucun des nombres premiers 2, 3, 5, 7.) Donc n et 37 sont premiers entre eux, et a fortiori, n' et 37 sont premiers entre eux : $\text{pgcd}(n', 37) = 1$. Donc $\text{pgcd}(n, x) = 3k \times \text{pgcd}(n', 37) = 3k$.

Exercice 3

1. Soient H et K les projetés orthogonaux de B et C sur la droite (AM). Pour calculer les aires de MAB et MAC on utilise leur base commune AM, et les longueurs des hauteurs correspondantes sont alors BH (pour le triangle MAB) et CK (pour MAC). On a donc

$$\frac{\mathcal{A}(MAB)}{\mathcal{A}(MAC)} = \frac{\frac{1}{2}AM.BH}{\frac{1}{2}AM.CK} = \frac{BH}{CK}$$

Par leur définition, les droites (BH) et (CK) sont perpendiculaires à (AM) et donc parallèles entre elles. En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle BNH (le segment $[CK]$ est éventuellement hors du triangle), on obtient $\overline{BH}/\overline{CK} = \overline{NB}/\overline{NC}$. En ne regardant que la valeur absolue des mesures algébriques, on a donc $\mathcal{A}(MAB)/\mathcal{A}(MAC) = BH/CK = NB/NC$.

2. Dans la suite il sera commode de noter A', B', C' les milieux des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

Soit M un point du plan. Si M n'appartient ni à (AC) ni à la parallèle à (BC) passant par A, d'après la question 1. on aura $\mathcal{A}(MAB) = \mathcal{A}(MAC)$ exactement lorsque $NB = NC$. Cela veut dire que N est le milieu A' de $[BC]$. Donc en conclusion $\mathcal{A}(MAB) = \mathcal{A}(MAC)$ ssi M appartient à la médiane (AA').

Si M appartient à (AC), alors $\mathcal{A}(MAC) = 0$. Donc on a $\mathcal{A}(MAB) = \mathcal{A}(MAC)$ si et seulement si $\mathcal{A}(MAB) = 0$, c'est-à-dire $M \in (AB)$. Dans ce cas, $M = A$.

Si enfin M appartient à la parallèle à (BC) passant par A, les droites (AM) et (BC) sont parallèles. Dans ce cas (en gardant les notations introduites dans 1.) les hauteurs BH et CK sont égales, donc on a toujours $\mathcal{A}(MAB) = \mathcal{A}(MAC)$.

En conclusion l'ensemble des points M du plan tels que $\mathcal{A}(MAB) = \mathcal{A}(MAC)$ est la réunion de la médiane (AA'), et de la parallèle à (BC) passant par A.

En particulier l'ensemble des points M intérieurs au triangle et tels que $\mathcal{A}(MAB) = \mathcal{A}(MAC)$ est le segment $[AA']$.

3. Soit G le point d'intersection des médianes (AA') et (BB'). Il est à l'intérieur du triangle : $G \in [AA']$ et $G \in [BB']$. Pour montrer que les trois médianes sont concourantes il suffit de montrer que $G \in [CC']$. Or d'après la question 2. on a

- $\mathcal{A}(GAB) = \mathcal{A}(GAC)$ (car $G \in [AA']$)
- $\mathcal{A}(GAB) = \mathcal{A}(GBC)$ (car $G \in [BB']$)

donc $\mathcal{A}(GAC) = \mathcal{A}(GBC)$. Comme de plus G est intérieur au triangle, en utilisant encore la question 2. on a $G \in [CC']$. Donc les trois médianes sont concourantes au point G.

4. (DESSIN)