Correction de l'exercice j.1

Exercice j.1 *La première chose importante à savoir pour cet exercice c'est que si on a trois points M, A, B, et qu'on appelle H le projeté orthogonal de B sur (MA) alors $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overline{MA}.\overline{MH}$. La deuxième c'est de savoir identifier les droites importantes de l'exercice, c'est-à-dire de bien « analyser la figure » comme on l'a fait pendant ces derniers TD. Ici ce sont les droites (AH) et (BC), qui sont perpendiculaires entre elles, ce qui est utile quand on calcule des produits scalaires...*

Soit ABC un triangle.

(1) Démontrons que si M appartient à $\mathcal{H}_A$ on a $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$. Soit H le pied de la hauteur $\mathcal{H}_A$, donc $\mathcal{H}_A = (AH)$. Choisissons un sens positif pour les mesures algébriques sur la droite (AH), alors si $M \in \mathcal{H}_A$ on a :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overline{MA}.\overline{MH}$$

et de même $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overline{MA}.\overline{MH}$. Donc les deux produits scalaires sont égaux.

Montrons maintenant que si M est dans le demi-plan délimité par $\mathcal{H}_A$ et contenant B, alors $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} < \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$. On passe par les deux droites (AH) et (BC), précisément, appelons N le projeté orthogonal de M sur (AH) et P son projeté orthogonal sur (BC). Alors

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA}).(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PB})$$

(*si vous voulez chercher un peu, arrêtez-vous ici de lire ce corrigé et continuez tout seul !*)

Développons ce produit scalaire :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \underbrace{\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}}_{=0} + \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{NA}.\overrightarrow{MP} + \underbrace{\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{PB}}_{=0}$$

De même on calcule $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{NA}.\overrightarrow{MP}$. Donc pour montrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} < \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$ il suffit de montrer que $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PB} < \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PC}$. Si B est entre P et H, on a $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PB} = \overline{MN}.\overline{PB} < \overline{MN}.\overline{PC} = \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PC}$. Si P est entre B et H c'est similaire. Donc on a démontré ce qu'on voulait.

Par symétrie, si M est dans le demi-plan délimité par $\mathcal{H}_A$ et contenant C, alors $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} > \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$.

En conclusion l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$ est la hauteur issue de A.

Bien sûr, une caractérisation semblable a lieu pour les hauteurs issues de B et de C.

(2) Montrons à l'aide de (1) que les hauteurs de ABC sont concourantes. Soit T le point d'intersection de la hauteur issue de A et de celle issue de B. D'après (1) on a donc

$$\overrightarrow{TA}.\overrightarrow{TB} = \overrightarrow{TA}.\overrightarrow{TC}$$

et

$$\overrightarrow{TB}.\overrightarrow{TA} = \overrightarrow{TB}.\overrightarrow{TC}$$

On en déduit que $\overrightarrow{TC}.\overrightarrow{TA} = \overrightarrow{TC}.\overrightarrow{TB}$, c'est-à-dire que T est sur la hauteur issue de C. Donc les hauteurs sont concourantes en T.