Corrigé de l'examen de Mathématiques

Exercice 1

1. Le calcul donne $323 = 17 \times 19$ et $1197 = 3^2 \times 7 \times 19$.
   On en déduit $\mathrm{pgcd}(a, b) = 19$ et $\mathrm{ppcm}(a, b) = 3^2 \times 7 \times 17 \times 19$.

2. Appliquons l'algorithme d'Euclide :
$$\begin{aligned} 1197 &= 3 \times 323 + 228 \\ 323 &= 1 \times 228 + 95 \\ 228 &= 2 \times 95 + 38 \\ 95 &= 2 \times 38 + 19 \\ 38 &= 2 \times 19 + 0 \end{aligned}$$

Le pgcd est le dernier reste non nul : c'est 19.

3. Le chiffre a_0 est le reste de la DE de 323 par 4 : $323 = 4 \times 80 + 3$
   Le chiffre a_1 est .... 80 par 4 : $80 = 4 \times 20 + 0$
   Le chiffre a_2 est .... 20 par 4 : $20 = 4 \times 5 + 0$
   Le chiffre a_3 est .... 5 par 4 : $5 = 4 \times 1 + 1$
   Le chiffre a_4 est .... 4 par 4 : $1 = 0 \times 1 + 1$

Donc l'écriture de 323 en base 4 est $\overline{11003}_{(\text{quatre})}$.

4. Le dernier chiffre de l'écriture décimale de $b^a = 1197^{323}$ est égal à son reste modulo 10. Or $1197 \equiv 7\ (10)$ donc c'est le même reste que 7^{323}. On a $7^2 \equiv 9\ (10)$, $7^3 \equiv 3\ (10)$, $7^4 \equiv 1\ (10)$: on voit qu'il suffit de connaître le reste de la division euclidienne de 323 modulo 4 qui est égal à 3 d'après la question préćdente : $7^{323} = 7^{4k+3} = (7^4)^k \times 7^3$ donc

$$1197^{323} \equiv 7^{323} \equiv (7^4)^k \times 7^3 \equiv 7^3 \equiv 3\ (10)$$

Exercice 2

1. Comme C est sur le cercle de diamètre $[AD]$, la droite (CD) est perpendiculaire à la droite (AC). La droite (BH) est aussi perpendiculaire à (AC) car c'est la hauteur de ABC en B. Donc $(CD)\ //\ (BH)$.
   De même le point B est sur le cercle de diamètre $[AD]$ donc $(BD) \perp (BA)$. Comme (CH) est la hauteur de ABC en C on a aussi $(CH) \perp (BA)$. Donc $(BD)\ //\ (CH)$.
   En conséquence le quadrilatère $BDCH$ a ses côtés parallèles deux à deux, c'est un parallélogramme.

2. Le point O est le milieu de $[AD]$. Par ailleurs I est le milieu de $[BC]$ qui est une diagonale de $BDCH$; les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu donc I est le milieu de l'autre diagonale $[DH]$. Par le théorème de Thalès dans les triangles DAH et DOI, il s'ensuit que $(AH)\ //\ (OI)$ et $\overline{AH} = 2\overline{OI}$. Ceci démontre que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OI}$.

3. La composée $t := s \circ s'$ est une translation de vecteur $2\overrightarrow{OI}$ (puisque (OI) est perpendiculaire à (BC)). D'après la question précédente c'est le vecteur $\overrightarrow{AH}$.

4. Il découle de (3) que l'image de A par t est H. Donc $s(s'(A)) = H$ qui est la même chose que $s'(A) = s(H)$. Comme la droite (BC) est un diamètre (donc un axe de symétrie du cercle) on a $s'(A) \in \mathscr{C}$, donc $s(H) \in \mathscr{C}$.

Exercice 3

1. La table des carrés modulo 4 est

reste mod. 4 de x	0	1	2	3
reste mod. 4 de x^2	0	1	0	1

2. Supposons que x et y aient la même parité. S'ils sont pairs tous les deux alors $z^2 = x^2+y^2 \equiv 0+0 \equiv 0\ (4)$ donc d'après le tableau ci-dessus z doit être pair. Donc 2 divise x, y et z ce qui contredit l'hypothèse que $\text{pgcd}(x, y, z) = 1$.

S'ils sont impairs tous les deux alors $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 1 + 1 \equiv 2\ (4)$ mais le tableau montre que cela n'est pas possible (il n'y a pas de carré congru à 2 modulo 4).

Donc x et y n'ont pas la même parité, et il en découle que $z^2 = x^2+y^2 \equiv 1+0 \equiv 1\ (4)$ donc z est impair.

3. Comme x et z sont impairs tous les deux, $z - x$ et $z + x$ sont pairs. De plus y est pair (par hypothèse) donc il existe bien des entiers u, v, w tels que $z + x = 2u$, $z - x = 2v$ et $y = 2w$. De plus on peut réécrire $(\mathscr{P})$ en $y^2 = z^2 - x^2 = (z - x)(z + x)$ c'est-à-dire $4w^2 = 4uv$, d'où en simplifiant par 4, $w^2 = uv$.

4. On observe d'abord que $z = u + v$ et $x = u - v$. Supposons que u et v soient tous deux divisibles par un entier premier p. Alors $z = u + v$ et $x = u - v$ sont divisibles par p, et comme $y^2 = z^2 - x^2$, alors y^2 est aussi divisible par p. Dans ce cas, y est divisible par p ce qui contredit $\text{pgcd}(x, y, z) = 1$. Donc, u et v sont premiers entre eux.

En utilisant le fait rappelé dans l'énoncé, comme $uv = w^2$ est un carré, alors u et v sont des carrés.

5. Si $x^2 + y^2 = z^2$ alors en reportant on a $(dx')^2 + (dy')^2 = (dz')^2$ donc en divisant par d^2, $x'^2 + y'^2 = z'^2$. Donc (x', y', z') est une solution de $(\mathscr{P})$.

6. On doit montrer que toute solution (x, y, z) de $(\mathscr{P})$ peut s'écrire sous la forme proposée ($x = d(a^2 - b^2)$, etc.) <u>et</u> qu'un triplet de la forme proposée est une solution de $(\mathscr{P})$.

Soit (x, y, z) une solution quelconque de $(\mathscr{P})$. Soit $d = \text{pgcd}(x, y, z)$ et $x = dx'$, $y = dy'$, $z = dz'$. Alors (x', y', z') est une solution (d'après la question 5.) avec $\text{pgcd}(x', y', z') = 1$ donc d'après les questions 1. à 4. il existe deux carrés $u = a^2$ et $v = b^2$ tels que $x' = u - v = a^2 - b^2$, $z' = u + v = a^2 + b^2$ et $y' = 2ab$. Donc, $x = d(a^2 - b^2)$, $y = 2dab$, $z = d(a^2 + b^2)$.

Réciproquement n'importe quel triplet de cette forme est une solution de $(\mathscr{P})$ car

$$\left[d(a^2 - b^2)\right]^2 + [2dab]^2 = d^2(a^4 + b^4 - 2a^2b^2 + 4a^2b^2) = d^2(a^2 + b^2)^2 = \left[d(a^2 + b^2)\right]^2$$

Donc on a bien ainsi toutes les solutions de $(\mathscr{P})$.

7. (Pour $a = 2$ et $b = 1$ on obtient le triplet connu $(3, 4, 5)$. C'est de la triche !)

Pour $a = 4$ et $b = 1$ on obtient le triplet $(15, 8, 17)$. Pour $a = 4$ et $b = 3$ on obtient le triplet $(7, 24, 25)$.

Exercice 4

1. Soit r une rotation quelconque d'angle θ. Si deux points M et N ont pour images $M' = r(M)$, $N' = r(N)$, alors $M'N' = MN$ (car r est une isométrie) et $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \theta\ (2\pi)$.

2. D'après la construction, on a $r_1(C) = B'$ et $r_1(C') = B$ donc $BB' = CC'$ et de plus $(\overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{B'B}) = \pi/3\ (2\pi)$. Donc les droites (BB') et (CC') sont sécantes (elles font entre elles un angle non nul modulo π).

3. On vient de montrer que l'angle entre les droites (BB') et (CC') est égal à $\pi/3$ modulo π. L'angle orienté $(\overrightarrow{TC'}, \overrightarrow{TB})$ mesure lui aussi cet angle de droites, donc $(\overrightarrow{TC'}, \overrightarrow{TB}) = \pi/3\ (\pi)$.

Comme on a aussi, par construction des triangles équilatéraux, $(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB}) = \pi/3\ (\pi)$, alors $(\overrightarrow{TC'}, \overrightarrow{TB}) = (\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB})\ (\pi)$, donc d'après la condition de cocyclicité T, A, C', B sont cocycliques.

4. En utilisant de nouveau la condition de cocyclicité on a $(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TC'}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC'})\ (\pi)$. Or du fait que $C' = r_2(A)$ on a $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC'}) = \pi/3\ (2\pi)$ donc $(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TC'}) = \pi/3\ (\pi)$.

5. On montre, sur le modèle de la question 3., que les points T, B. A', C sont cocycliques. Ensuite on montre comme dans la question 4. que $(\overrightarrow{TB}, \overrightarrow{TA'}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA'}) = \pi/3\ (\pi)$.

6. Utilisant les calculs des questions précédentes on a :

$$(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TA'}) = (\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TC'}) + (\overrightarrow{TC'}, \overrightarrow{TB}) + (\overrightarrow{TB}, \overrightarrow{TA'}) = \pi/3 + \pi/3 + \pi/3 = 0\ (\pi)$$

Donc les points T, A, A' sont alignés i.e. T appartient à la droite (AA').