Pourboire or not pourboire

D'abord quelques commentaires sur l'organisation des questions, telle qu'elle est conçue. La question (1) sert à voir pourquoi le problème n'est intéressant, dans un certain sens, que si a et b sont premiers entre eux. La question (2) sert à « mathématiser » le problème pour pouvoir le traiter. Les question (3) et (4) servent à obtenir une intuition de ce qu'il se passe sur quelques exemples, et notamment à deviner l'expression de m. La question (5) montre que cette intuition est la bonne, c'est-à-dire que l'expression de m constatée sur les exemples est vraie tout le temps. La question (7) prépare la question (8) où on doit montrer qu'il y a autant de bons que de mauvais prix. Les questions (9) et (10) sont des applications et vérifications.

Une autre remarque : dire que p est un bon prix veut dire qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p = \lambda a + \mu b$. Par exemple, si $a = 3$ et $b = 7$, $p = 13$ est un bon prix. Mais ça ne veut pas dire que les coefficients λ et μ seront positifs pour n'importe quelle écriture $p = \lambda a + \mu b$! Dans notre exemple, on a aussi $p = 13 = 9 \times 3 - 2 \times 7$ avec $\mu = -2$ négatif. Ce n'est pas un mauvais prix pour autant.

Une dernière chose, peu importante : un couple est ordonné, c'est-à-dire que $(5, 14)$ n'est pas la même chose que $(14, 5)$. Donc pour être précis, contrairement à ce que je vous avais dit, dans (10) il y a 4 couples solutions...

---

(1) Soit $d := \mathrm{pgcd}(a, b)$, alors a et b sont divisibles par d. Donc on ne peut payer que des prix qui sont multiples de d. Si a et b ne sont pas premiers entre eux, c'est-à-dire si $d > 1$, ce n'est pas très pratique : la plupart des prix sont mauvais, en particulier, il y en a une infinité.

(2) L'ensemble des bons prix est l'ensemble des nombres qui s'écrivent $\lambda a + \mu b$ avec λ et μ entiers naturels. En particulier il est clair que la somme de 2 bons prix est un bon prix.

(3) et (4)

a	b	Ensemble des mauvais prix	m	$m+a+b$
2	3	$\{1\}$	1	6
2	5	$\{1;3\}$	3	10
2	7	$\{1;3;5\}$	5	14
3	4	$\{1;2;5\}$	5	12
3	5	$\{1;2;4;7\}$	7	15
3	7	$\{1;2;4;5;8;11\}$	11	21
4	5	$\{1;2;3;6;7;11\}$	11	20
4	7	$\{1;2;3;5;6;9;10;13;17\}$	17	28
5	6	$\{1;2;3;4;7;8;9;13;14;19\}$	19	30
5	7	$\{1;2;3;4;6;8;9;11;13;16;18;23\}$	23	35
6	7	$\{1;2;3;4;5;8;9;10;11;15;16;17;22;23;29\}$	29	42

Sur ces exemples, on constate que l'ensemble des mauvais prix est fini.

De plus, sur ces exemples toujours, $m+a+b$ est toujours égal à ab. On peut donc poser $f(a,b) := ab-(a+b)$ et se demander si la formule $m = f(a, b)$ est vraie en général.

On peut aussi observer que sur les exemples le plus grand mauvais prix est premier, mais si la formule qu'on vient de proposer est vraie alors pour $a = 2$ et $b = 11$ on aura $m = 9$ qui n'est pas premier. Donc cela ne sera pas un phénomène général.

(5) Démontrons que $f(a, b) = ab - (a + b)$ est un mauvais prix. Supposons que $ab - (a + b)$ soit un bon prix, c'est-à-dire qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{N}^2$ tels que $ab-(a+b) = \lambda a+\mu b$. On en déduit $ab = (\lambda+1)a+(\mu+1)b$. Ainsi a divise $(\mu + 1)b$ donc, comme a et b sont premiers entre eux, par le lemme de Gauß on obtient que a divise $\mu + 1$. De même, on montre que b divise $\lambda + 1$:

$$\exists \mu' \in \mathbb{N},\ \mu + 1 = \mu' a$$
$$\exists \lambda' \in \mathbb{N},\ \lambda + 1 = \lambda' b$$

On a donc $ab = \lambda' ab + \mu' ab$ d'où en divisant par ab : $1 = \lambda' + \mu'$. Nécessairement, $\lambda' = 0$ ou $\mu' = 0$ (sinon leur somme serait au moins égale à 2). Cela implique alors que $\lambda + 1 = \lambda' b = 0$ (si $\lambda' = 0$) ou que $\mu + 1 = \mu' a = 0$ (si $\mu' = 0$). C'est impossible puisque $\lambda \geq 0$ et $\mu \geq 0$. Cela signifie donc que $ab - (a+b)$ est un mauvais prix.

Démontrons ensuite que tout prix $p \geq f(a,b)+1$ est un bon prix. Soit donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq ab-(a+b)+1$. Considérons l'écriture de Bézout unique $p = \lambda a + \mu b$ avec $0 \leq \lambda \leq b-1$. Montons qu'on a alors $\mu \geq 0$. En effet, sinon on a $\mu \leq -1$ donc

$$p = \lambda a + \mu b \leq (b-1)a - b = ab - a - b$$

or on a supposé le contraire. Donc $p = \lambda a + \mu b$ avec $\lambda \geq 0$ et $\mu \geq 0$, c'est-à-dire que p est un bon prix.

La conclusion est que le plus grand mauvais prix est $m = ab - (a+b)$, en particulier, il n'y a qu'un nombre fini de mauvais prix.

(6) On a $m = (a-1)(b-1) - 1$. Comme a et b sont premiers entre eux, l'un au moins est impair. Donc $a-1$ ou $b-1$ est pair, donc $(a-1)(b-1)$ est pair. Donc $m = (a-1)(b-1)-1$ est impair.

Une autre démonstration vient en raisonnant modulo 2. Comme a et b sont premiers entre eux on ne peut pas avoir $a \equiv 0$ (2) et $b \equiv 0$ (2). Donc on a trois possibilités :

(i) $a \equiv 0$ et $b \equiv 1$. Dans ce cas $ab - (a+b) \equiv 0 - (0+1) \equiv -1 \equiv 1$.

(ii) $a \equiv 1$ et $b \equiv 0$. Dans ce cas $ab - (a+b) \equiv 0 - (1+0) \equiv -1 \equiv 1$.

(iii) $a \equiv 1$ et $b \equiv 1$. Dans ce cas $ab - (a+b) \equiv 1 - (1+1) \equiv -1 \equiv 1$.

Dans tous les cas on voit que $ab - (a+b)$ est congru à 1 modulo 2, i.e. est impair.

(7) On doit montrer que, étant donné $p \in E = \{0, 1, \dots, m\}$, si p est un bon prix alors $m - p$ est un mauvais prix, et si p est un mauvais prix alors p est un bon prix.

Supposons que p est un bon prix. Si $m-p$ était aussi un bon prix, alors la somme $p + (m-p) = m$ serait un bon prix (voir (2)). Ceci n'est pas vrai. Donc, $m-p$ est un mauvais prix.

Supposons maintenant que p est un mauvais prix et montrons que $m-p$ est un bon prix. Considérons l'écriture de Bézout unique de $m-p$, c'est-à-dire $m - p = \lambda a + \mu b$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2$ et $0 \leq \lambda \leq b-1$. Il suffit de montrer qu'alors $\mu \geq 0$. Or, on a

$$p = m - (m-p) = m - (\lambda a + \mu b) = ab - (a+b) - (\lambda a + \mu b) = (b - (\lambda+1))a - (\mu+1)b$$

Posons $\lambda' := b - (\lambda+1)$ et $\mu' := -(\mu+1)$, de sorte que $p = \lambda' a + \mu' b$. Vu qu'on a choisi l'écriture de Bézout unique on a $\lambda' \geq 0$, si de plus $\mu' \geq 0$ alors p serait un bon prix, contrairement à l'hypothèse. Ainsi, $\mu' < 0$ i.e. $\mu \geq 0$ qui est ce qu'on voulait montrer. Donc $m-p$ est un bon prix.

(8) L'ensemble $E = \{0, 1, \dots, m\}$ compte $m + 1 = (a-1)(b-1)$ éléments. Soient $p_1, \dots, p_r$ les bons prix dans E, avec $r \leq m+1$. On observe que pour tout prix $p \in E$, $i(i(p)) = p$.

On va montrer qu'il y a aussi r mauvais prix, qui sont $i(p_1), \dots, i(p_r)$. D'après la question précédente ces prix sont tous des mauvais prix. Ce sont r prix distincts, car étant donnés deux indices distincts k, ℓ entre 1 et r, si $p_k \neq p_\ell$ alors $m - p_k \neq m - p_\ell$. Donc il y en a r. De plus tout mauvais prix est de la forme $i(p_k)$, car si on a un mauvais prix p alors $i(p)$ est un bon prix d'après (7), donc c'est l'un des prix $p_1, \dots, p_r$: $i(p) = p_k$. Alors $p = i(i(p)) = i(p_k)$.

On a donc $E = \{p_1, \dots, p_r, i(p_1), \dots, i(p_r)\}$, c'est-à-dire que cet ensemble est partagé en deux parties égales entre les bons et les mauvais prix. Son nombre d'éléments $m+1$ est donc aussi égal à $2r$, donc il y a $r = \frac{1}{2}(a-1)(b-1)$ mauvais prix. Remarquons que $(a-1)(b-1)$ est pair d'après (6) donc ce nombre est bien entier.

(9) Le nombre de mauvais prix pour chaque colonne du tableau est : 1, 2, 3, 3, 4, 6, 6, 9, 10, 12, 15. Cela correspond bien à $\frac{1}{2}(a-1)(b-1)$, dans chaque cas.

(10) On doit chercher des couples (a,b) d'entiers premiers entre eux et tels que $\frac{1}{2}(a-1)(b-1) = 26$. Cela équivaut à $(a-1)(b-1) = 52$. Donc $a-1$ et $b-1$ sont des diviseurs de 52, soit, 1, 2, 4, 13, 26, ou 52. Supposons que $a \leq b$, les possibilités sont

(i) $a - 1 = 1$ et $b - 1 = 52$.

(ii) $a - 1 = 2$ et $b - 1 = 26$.

(iii) $a - 1 = 4$ et $b - 1 = 13$.

Le cas (ii) est à exclure car $a = 3$ et $b = 27$ ne sont pas premiers entre eux. Il reste les couples $(a,b) = (2,53)$ et $(5,14)$ (lorsque $a \leq b$) et $(53,2)$ et $(14,5)$ (lorsque $a > b$).