# Plan d'étude des suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Lorsque l'énoncé de l'exercice ou du problème ne pose pas de questions intermédiaires (mais ce sera probablement souvent le cas en examen), voilà un petit rappel des points essentiels de ce qu'il faut faire pour étudier une suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$.

**a** La première chose à vérifier est que la fonction $f$ est continue, au moins sur un intervalle stable (contenant les termes de la suite !) sur lequel on va l'étudier.
*Si $f$ n'est pas continue, alors tout ce qui va suivre ne s'applique pas.*

**b** Ensuite il faut trouver un intervalle $I = [a, b]$ (= fermé et borné) qui soit stable par $f$, c'est-à-dire que $f(I) \subset I$. Il faut bien sûr que $I$ contienne tous les termes de la suite à étudier, au moins à partir d'un certain rang (cf exemple $f(x) = \cos(x)$ fait en TD).

**c** Ensuite il faut chercher les points fixes de $f$ dans $I$ : y en a-t-il un ou plusieurs ? S'il sont « calculables » (par exemple équation du 2nd degré), il faut les calculer.

**d** NB : pour simplifier, je prendrai $I = [0, 1]$ dans tous les exemples qui suivent.

---

**1** Le cas le plus facile : c'est celui où $f$ est contractante sur $I$. Dans ce cas il y a un unique point fixe $\alpha \in I$, et la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\alpha$.

**Attention** : la fonction $f$ n'est pas nécessairement croissante !
la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas nécessairement monotone !

**Exemples** : $f(x) = \frac{1}{4}(x + 1)$ ou $f(x) = \frac{1}{20}(\sin(10x) + 2)$ sur $I = [0, 1]$.

**2** Le deuxième cas le plus facile : c'est celui où $f$ est croissante. Dans ce cas la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone, et comme elle est bornée elle converge. Il faut trouver vers quel point fixe elle converge.

**Attention** : la fonction $f$ n'est pas nécessairement contractante !
elle peut avoir plusieurs points fixes !
la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas nécessairement croissante : elle peut être décroissante !

**Exemples** : $f(x) = x^2$ n'est pas contractante sur $[0, 1]$, elle a plusieurs points fixes (deux), et les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ sont décroissantes.

**3** Un autre cas « gérable » est celui où $f$ est décroissante. Dans ce cas la suite $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et la suite $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont monotones, l'une croissante et l'autre décroissante. Comme elles sont bornées elles convergent toutes les deux, mais *pas nécessairement vers la même limite*. Les limites sont des points fixes de $f \circ f$ (attention !) car $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ sont toutes les deux définies par une relation de récurrence $u_{2n} = (f \circ f)(u_{2n-2})$ (idem pour celle d'indices impairs).

(Les pts fixes de $f$ sont des pts fixes de $f \circ f$, mais $f \circ f$ peut en avoir qui ne sont pas pts fixes de $f$.) Il faut trouver vers quels points fixes de $f \circ f$ convergent $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$. La suite « totale » $(u_n)$ converge si et seulement si $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ ont même limite.

**Attention** : là encore la fonction $f$ n'est pas nécessairement contractante !
elle peut avoir plusieurs points fixes !
*ici en général la suite $(u_n)$ divergera* !

**Exemples** : $f(x) = \cos(x)$ sur $I = [0, 1]$ : on a vu en TD que ça converge, en fait dans ce cas $f$ est contractante sur $I$ donc on est dans le premier cas (le plus facile).
$f(x) = 1 - x$ et $u_0 = 1/4$. Dans ce cas les sous-suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ convergent vers deux limites différentes et $(u_n)$ diverge.
$f(x) = 1 - x^2$ et $u_0 = 1/4$. Vérifiez qu'il se passe la même chose que dans l'exemple précédent (ici il y a un peu de travail...).

**4** Dernier cas : on n'est dans aucun des cas précédents. Alors il faut réféchir un peu... faire preuve de jugeotte... L'énoncé vous aidera !