Examen de Mathématiques

— Durée : 1 heure 45 —

L'usage des documents de cours, calculatrices et téléphones portables est interdit.
Le barême est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (10 points)

Soit f la fonction réelle à valeurs réelles, strictement croissante, définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f.
2. La fonction f est-elle continue ? (Justifiez.)
3. Étudier, en fonction du choix de $u_0 \in \mathbb{R}$, la convergence des suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$.
4. Donner la formule définissant f^{-1}.

Exercice 2 (10 points)

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue et $\mathrm{Fix}(f)$ l'ensemble de ses points fixes dans $[0,1]$. On suppose que

$$f \circ f = f \qquad (\star)$$

1. Donner deux exemples de fonctions qui vérifient $(\star)$.
2. Montrer que $\mathrm{Fix}(f) = f([0,1])$.
3. Montrer que $\mathrm{Fix}(f)$ est un segment (un intervalle fermé borné).
4. Trouver toutes les solutions de $(\star)$. Dessiner le graphe d'une solution générale de $(\star)$.
5. Trouver toutes les solutions de $(\star)$ qui sont de plus dérivables sur $]0,1[$.

Exercice 3 (Bonus)

Soit f une fonction continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$ et telle que $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe un élément $c \in]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.