Examen de Mathématiques

— Durée : 1 heure 30 —

L'usage des calculatrices et des téléphones portables est interdit.
Le sujet est volontairement un peu long, il est conseillé de le lire en entier avant de commencer.
Le barême est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (5,5 points)

1. Étant donné un ensemble $A \subset \mathbb{R}$, écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes :
   (a) m est un minorant de A.
   (b) A n'est pas borné.
2. Montrer que toute suite convergente est bornée.

Exercice 2 (6,5 points)

Soit $I = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2\right\}$.

1. Montrer que I est la réunion de deux intervalles.
2. Indiquer, sans justifier les réponses : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de I.

Exercice 3 (8 points)

Pour tout $n \geq 1$, soient $h_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$ et $g_n = h_n - \ln(n)$.

1. Montrer que pour $k \geq 1$ et $x \in [k, k+1]$ on a : $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$ et en déduire que $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$.
2. Montrer que h_n tend vers l'infini.
3. Montrer que g_n est décroissante et positive et conclure que cette suite converge vers un nombre réel $\gamma \geq 0$.

Remarque historique : le nombre γ porte le nom de *constante d'Euler*, en hommage au mathématicien d'origine suisse Leonhard Euler (1707-1783) qui l'a découvert. Cette constante γ vaut environ $0,5772156649\ldots$ et on ne sait pas si elle est rationnelle ou irrationnelle.