

## Intégration (1)

### Question de cours

**Exercice 1.1** Écrivez la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

### Calculs de primitives et d'intégrales

**Exercice 1.2** Calculer les primitives suivantes :

$$\int e^x \cos x dx \quad ; \quad \int \frac{\ln(x)}{x^n} dx \quad (n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad \int \operatorname{Arctan}(x) dx \quad ; \quad \int (x^2 + x + 1)e^x dx \quad ;$$

$$\int \frac{1}{x \ln(x)} dx \quad ; \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad ; \quad \int \tan(x) dx \quad ; \quad \int \frac{1}{\sin(x)} dx.$$

**Exercice 1.3** Considérons l'intégrale

$$I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$$

Effectuer le changement de variables  $u = \sqrt{e^x - 1}$  et calculer  $I$ .

**Exercice 1.4** Calculer les primitives suivantes :

$$\int \operatorname{ch}(x) \quad ; \quad \int \frac{dx}{x^2 + 5} \quad ; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5}} \quad ; \quad \int e^x \sin(e^x) dx \quad ; \quad \int \tan^3 x dx \quad ;$$

$$\int \frac{1}{\tan^3 x} dx \quad ; \quad \int \frac{2x + 3}{(x^2 + 3x + 7)^m} dx, \quad m \in \mathbb{N} \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad ; \quad \int \frac{\operatorname{ch} x dx}{\operatorname{sh}^5 x}.$$

**Exercice 1.5** Soit  $I_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt$ .

1. Établir une relation de récurrence entre  $I_n$  et  $I_{n+1}$ .
2. Calculer  $I_n$ .
3. En déduire  $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} C_n^k$ .

## Utilisation de théorèmes du cours

**Exercice 1.6** Soit  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ . En majorant la fonction intégrée, montrer que

$$(I_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$$

**Exercice 1.7** Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur un segment, et

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

En utilisant le théorème de la moyenne, montrez que  $F$  est continue sur  $[a, b]$ .

## Sommes de Riemann

**Exercice 1.8** Calculer les limites suivantes :

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n \frac{n}{n^2 + p^2}$ .
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \ln \frac{(3n + 6p - 4)(n + 2p)^2}{3n^3}$ .