Continuité et dérivabilité des fonctions (k)

Continuité

Exercice k.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Montrer que si f est continue en $a \in I$ et si $f(a) \neq 0$ alors f est de signe constant dans un voisinage de a.

Exercice k.2 Étudier la continuité des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} 1/x \text{ si } x \in \mathbb{R}^* \\ 36 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(u) = u\mathrm{E}(u)$ (d) $f(t) = \begin{cases} x \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Exercice k.3 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

(1) Calculez $f(0)$ et montrez que f est impaire.

(2) Calculez f sur $\mathbb{N}$, puis sur les relatifs et enfin sur les rationnels en fonction de $f(1)$.

(3) On suppose que f est continue en 0. Montrer qu'alors $f(x) = ax$ où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice k.4 Soient f et g deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

(1) Montrez que f (et g) admet un point fixe.

On suppose que $f \circ g = g \circ f$. On veut montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

(2) Soit A l'ensemble des points fixes de f. Montrez que A admet une borne inférieure a.

(3) Montrez que $a \in A$.

(4) Montrez que A est stable par g. En déduire que $g(a) \geq a$ puis que $g(a) \geq f(a)$.

(5) Trouver de manière similaire un $b \in [0,1]$ tel que $g(b) \leq f(b)$, puis conclure.

Exercice k.5 [Théorème de la corde universelle] Soit ℓ un réel avec $0 < \ell < 1$. Le théorème de la corde universelle dit pour quelles valeurs de ℓ il existe une corde horizontale de longueur ℓ pour la courbe représentative d'une fonction continue $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.

(1) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la courbe représentative de f admet une corde horizontale de longueur $1/n$.

> *Soit la fonction $g\colon [0, 1-\frac{1}{n}] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x+\frac{1}{n}) - f(x)$. Interprétez l'existence d'une corde horizontale de longueur $1/n$ en termes de la fonction g. Calculez $\sum_{i=0}^{n-1} g(\frac{i}{n})$ et déduisez-en que g a un zéro dans un intervalle de la forme $[\frac{i}{n}, \frac{j}{n}]$.*

(2) Montrez que la courbe représentative de f n'admet pas nécessairement une corde horizontale de longueur ℓ si ℓ n'est pas de la forme $1/n$.

> *Si ℓ n'est pas de la forme $1/n$ alors il existe des fonctions g continues, périodiques de période ℓ, et telles que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. (Pourquoi ? Justifiez !) Montrez que si on pose $f(x) = g(x) - x$, alors f n'a pas de corde horizontale de longueur ℓ.*

Dérivabilité

Exercice k.6 On désigne par P le polynôme $(X^2-1)^n$; montrer que $P^{(n)}$, polynôme dérivé d'ordre n de P, a toutes ses racines distinctes et appartenant à l'intervalle $]-1,1[$.

> *Indication : montrer par récurrence que $P^{(k)}$ a k racines distinctes dans* $]-1,1[$.

Exercice k.7 Retrouver, grâce au théorème de Rolle, la propriété qu'un polynôme à coefficients réels de degré n possède au plus n racines réelles distinctes.

Exercice k.8 Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ $(0<a<b)$, dérivable sur $]a,b[$, telle que $f(a)=f(b)=0$.

(1) Montrer qu'il existe un point M du graphe C de f tel que la tangente en M à C passe par l'origine (on appliquera le théorème de Rolle à la fonction $x\mapsto f(x)/x$)).

(2) Donner une condition supplémentaire sur f pour que le résultat reste vrai si $a=0$.

Exercice k.9 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et telle que l'on ait :

$$\text{pour tout } (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |f(x)-f(y)|\le|x-y|^2.$$

Montrez que f est constante.

Exercice k.10 [Théorème de Darboux] Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

(1) Soit $(a,b)\in I^2$ tel que $a<b$. On suppose que $f'(a)f'(b)<0$. Montrer que l'une des deux bornes de f sur $[a,b]$ est atteinte en un point $c\in]a,b[$.

(2) En déduire que $f'(I)$ est un intervalle, i.e. f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

(3) En conclure que la propriété des valeurs intermédiaires n'est pas caractéristique des fonctions continues.

> *Indication : pour trouver un contre-exemple, étudiez la régularité de la fonction définie par $g(x)=x^2\sin(1/x)$ si $x\neq0$ et $g(0)=0$.*

Exercice k.11 Deux fonctions f et g de classe C^∞ sur un voisinage de $a\in\mathbb{R}$, et dont les développements limités à tout ordre en a sont égaux, coïncident-elles sur un voisinage de a ? Pour tenter de donner un contre-exemple à cette question, on étudie la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases}\exp(-1/x^2) & \text{si } x\neq0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

et en particulier sa régularité et ses développements limités en 0.

(1) f est-elle continue en 0 ?

(2) Calculez l'expression de f', f'', f''' sur l'un des intervalles $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$. Donnez une formule générale, faisant intervenir un polynôme (non explicite), pour l'expression de la dérivée n-ème $f^{(n)}$.

> *Indication : la difficulté est d'arriver à donner un énoncé suffisamment précis pour le démontrer par récurrence.*

(3) Montrez que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donnez son DL en 0 à l'ordre n. Tracez son graphe sur $\mathbb{R}$.

(4) Répondez à la question initiale de l'exercice.