Continuité et dérivabilité des fonctions (j)
Fonctions convexes

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *convexe* si et seulement si pour tout $(x, y) \in I^2$ et pour tout $t \in [0, 1]$ on a

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \qquad (\star)$$

Graphiquement, la convexité de f veut dire que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de ses cordes (une *corde* est un segment joignant deux points de la courbe $\mathscr{C}_f$, comme une corde d'un arc). Dans ce TD on étudie quelques propriétés des fonctions convexes.

On dit que f est *concave* lorsqu'on a l'inégalité opposée $f(ta + (1-t)b) \geq tf(a) + (1-t)f(b)$, pour tous x, y et pour tout t. C'est la même chose que de dire que $-f$ est convexe. Il est facile de voir qu'une fonction ne peut être convexe *et* concave que si elle est constante. Si f est concave on dit parfois que « sa concavité est tournée vers le bas » et si f est convexe on dit que « sa concavité est tournée vers le haut ».

Lorsqu'on roule à vélo, la concavité de la trajectoire est liée au fait qu'on tourne d'un côté ; il y a un changement de concavité au moment où on tourne le guidon pour aller de l'autre côté. Le point où cela se produit est appelé *point d'inflexion*. Par exemple si on roule sur la courbe de la fonction $x \mapsto x^3$ selon les x croissants, on tourne à droite jusqu'au point d'inflexion $(0, 0)$, puis à gauche.

Exercice j.1 Pour une fonction convexe quelconque $f\colon I \to \mathbb{R}$, faites un dessin dans le cadre de la page précédente, pour illustrer le fait que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de la corde joignant les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.

Vérifiez que la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est convexe. Vérifiez que la fonction $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ n'est pas convexe.

Donnez deux autres exemples de fonctions usuelles qui « ont l'air » convexes.

Exercice j.2 *Remarques préliminaires.*
La convexité d'une fonction est très liée aux propriétés de ses *taux d'accroissement*. Pour $a \in I$ fixé, le *taux d'accroissement de la fonction f entre a et b* est la quantité

$$t_a(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ce qui définit une fonction $t_a\colon I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$.

(1) Soient $(x, y) \in I^2$ et $t \in [0, 1]$. On suppose que $x < y$. Donnez l'expression de t en fonction de x, y et $z := tx + (1 - t)y$. Montrez que $z \in [x, y]$ et que n'importe quel point du segment $[x, y]$ peut se mettre sous la forme $tx + (1 - t)y$ avec $t \in [0, 1]$.

(2) Démontrez que pour tout $(a, b) \in I^2$ avec $a \neq b$ on a $t_a(b) = t_b(a)$.

Exercice j.3 Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque.

(1) Démontrez que si f est convexe alors t_a est croissante, pour tout $a \in I$.

> *Indications : il faut montrer que $b < c \Rightarrow t_a(b) \leq t_a(c)$ pour tous b, c dans $I \setminus \{a\}$. Pour cela partez de l'inégalité de convexité ($\star$) écrite en utilisant la variable z de j.2(1). Distinguez selon la position de a :*
> *- si $a < b < c$, posez $x = a$, $z = b$, $y = c$ et soustrayez $f(a)$ de part et d'autre dans l'inégalité obtenue.*
> *- si $b < a < c$, posez $x = b$, $z = a$, $y = c$ et soustrayez $\frac{c-a}{c-b} f(a)$.*
> *- si $b < c < a$, posez $x = b$, $z = c$, $y = a$ et soustrayez $f(c)$.*

(2) (À faire chez vous.) Démontrez que la réciproque est vraie.

Exercice j.4 Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

(1) Supposons que $I = [a, b]$ est un intervalle fermé borné. Donnez un contre-exemple montrant que f n'est pas nécessairement continue aux extrémités de I.

(2) Démontrez que f est continue en tout point de l'intérieur de I.

> *Indication : soit $x_0 \in \mathring{I}$, donc il existe un segment $[a, b] \subset I$ tel que $x_0 \in]a, b[$. Pour tout $y \neq x_0$ tel que $a < y < b$, on a $t_{x_0}(a) \leq t_{x_0}(y) \leq t_{x_0}(b)$.*
> *Déduisez-en que $|f(y) - f(x_0)| \leq |y - x_0| \cdot \max(|t_{x_0}(a)|, |t_{x_0}(b)|)$ et concluez.*

Exercice j.5 Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I (mais non nécessairement convexe).

(1) Soit $a \in I$ et supposons pour simplifier ([1]) que $a \in \mathring{I}$, l'intérieur de I. Montrez qu'on peut prolonger la fonction $t_a\colon I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ en une fonction $\overline{t}_a\colon I \to \mathbb{R}$ continue au point a, en posant $\overline{t}_a(a) = f'(a)$. En pratique, on garde souvent la même notation t_a pour désigner la fonction $\overline{t}_a$.

(2) Montrez que si f est convexe sur I alors f' est croissante.

> *Indications : il faut montrer que si $x < y$ alors $f'(x) \leq f'(y)$. Si $\varepsilon > 0$ est assez petit on a $x + \varepsilon < y$. En utilisant la croissance des taux d'accroissement on a $t_x(x+\varepsilon) \leq t_x(y) = t_y(x) \leq t_y(y-\varepsilon)$. Faites tendre ε vers 0.*

(3) (À faire chez vous.) Démontrez que la réciproque est vraie.

> *Indications : d'après l'exercice j.3 il suffit de montrer que si f' est croissante, alors t_x est croissante ($x \in I$ étant choisi). Comme f est dérivable, alors t_x est dérivable sur $I \cap]-\infty, x[$ et sur $I \cap]x, +\infty[$. Calculez l'expression de la dérivée t'_x sur l'un de ces intervalles.*
> *Pour $u \in I$ fixé, soit maintenant la fonction $\varphi(x) = f(x) - f(u) - f'(u)(x-u)$. Montrez en dérivant qu'elle décroît jusqu'en u et croît après u. Déduisez-en que $\varphi(x) \geq 0$ sur I. Concluez que $t'_x(u)$ est positive sur $I \cap]-\infty, x[$ et sur $I \cap]x, +\infty[$, donc t_x croissante sur I (attention ! il y a une subtilité).*

Exercice j.6 La convexité des fonctions dérivables a une autre interprétation graphique que celle qui résulte de la définition : nous allons montrer que « la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes ». Soit donc $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable sur I.

(1) Soit $x_0 \in I$. Donnez l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point x_0. Écrivez ce que veut dire que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de sa tangente en x_0. Faites un dessin dans le cadre ci-dessous.

(2) Soit $x > x_0$. Montrez que $f'(x_0) \leq t_{x_0}(x)$.

> *Indication : si $\varepsilon > 0$ est assez petit on a $x_0 < x_0 + \varepsilon < x$ et donc $t_{x_0}(x_0+\varepsilon) \leq t_{x_0}(x)$. Faites tendre ε vers 0.*

(3) Montrez de même que si $x < x_0$ on a $f'(x_0) \geq t_{x_0}(x)$.

(4) Déduisez de (2) et (3) que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de sa tangente en x_0.

[1] Si a n'est pas intérieur à I, c'est soit son extrémité inférieure et on pose alors $t'_a(a) = f'_d(a)$, nombre dérivé à droite de f en a ; soit son extrémité supérieure et on pose alors $t'_a(a) = f'_g(a)$, nombre dérivé à gauche de f en a.

Pour les fonctions deux fois dérivables, voilà le résultat principal du TD, à retenir :

Exercice j.7 Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I. Montrez que f est convexe si et seulement si f'' est positive ou nulle sur I.

Pour finir nous allons donner quelques applications de tout ce qui précède.

Exercice j.8 Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Nous allons montrer que pour $n \geq 2$ on a la propriété P suivante, renforcement de l'inégalité qui définit les fonctions convexes :

> pour tout $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in [0,1]^n$ tel que $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$,
> pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I^n$,
> on a : $f(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n) \ \leq\ t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \cdots + t_nf(x_n)$

(1) Montrez que $P(2)$ n'est autre que l'inégalité qui définit la convexité de f.

(2) Montrez que $P(n) \ \Rightarrow\ P(n+1)$.

> *Indications : démontrez d'abord $P(n+1)$ lorsqu'un des t_i est nul. Dans le cas où aucun des t_i n'est nul, posez $t := t_1 + t_2 + \cdots + t_n$ et utilisez la convexité en écrivant*
>
> $$t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n + t_{n+1}x_{n+1} = t\,\frac{t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n}{t} + (1-t)x_{n+1}$$

Exercice j.9 Soient $n \geq 2$ un entier et $u_1, \ldots, u_n$ des nombres réels. On définit

(M_a) la *moyenne arithmétique* $M_a = \frac{u_1+\cdots+u_n}{n}$,

(M_g) la *moyenne géométrique* $M_g = \sqrt[n]{u_1 \ldots u_n}$ si les u_i sont tous positifs,

(M_h) la *moyenne harmonique* M_h telle que $\frac{n}{M_h} = \frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_n}$ si les u_i sont tous non nuls.

On souhaite montrer que si $u_i > 0$ on a toujours :

$$M_h \leq M_g \leq M_a$$

(1) En utilisant l'exercice j.7 montrez que la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(u) = -\ln(u)$ est convexe. En utilisant le résultat de l'exercice j.8 pour cette fonction montrez que $M_h \leq M_g$.

> *Indication : prenez $t_1 = \cdots = t_n = 1/n$.*

(2) En faisant pareil avec la fonction définie par $f(u) = \exp(u)$ montrez que $M_g \leq M_a$.