Limites et continuité des fonctions (i)

Exercice i.1 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction.

(1) Donnez la définition de la continuité de f en un point $x_0 \in I$.

(2) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrez que la fonction définie par $f(x) = x^2$ est continue en a.

(3) Montrez que la fonction définie par $f(x) = \mathrm{E}(x)$ n'est pas continue en 1.

Exercice i.2 Montrez qu'une fonction contactante sur un intervalle est continue en tout point de l'intervalle. Est-ce que ce résultat est encore vrai pour une fonction vérifiant

$$\text{pour tout } (x, y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

mais avec $k \geq 1$?

Exercice i.3 Montrez que si une fonction f définie sur $E \subset \mathbb{R}$ est continue en x_0 alors la fonction $|f|$ est, elle aussi, continue en x_0. Montrez que la réciproque est fausse.

Exercice i.4 On considère le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O. On trace un repère orthonormé centré en O et on appelle A le point de coordonnées $(1, 0)$.

On trace l'axe des cosinus, l'axe des sinus et l'axe des tangentes. Soit $M \in \mathcal{C}$ un point qui forme un secteur angulaire $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ de mesure x radians. Les trois axes que l'on vient de nommer sont les axes sur lesquels on peut lire la valeur de $\cos(x)$, de $\sin(x)$ et de $\tan(x)$, respectivement. En fait, si on appelle C la projection de M sur l'axe des cosinus, S la projection de M sur l'axe des sinus, et T l'intersection de (OM) et de l'axe des tangentes, alors on a

$$\cos(x) = \overline{OC} \qquad , \qquad \sin(x) = \overline{OS} \qquad \text{et} \qquad \tan(x) = \overline{AT}$$

(les barres désignent des mesures algébriques). Dans cet exercice, on admet que les fonctions cos, sin et tan sont continues sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$.

(1) Faites un dessin. On supposera $0 < x < \pi/2$.

(2) Comment s'interprète le nombre x en termes de longueurs ?

(3) En comparant la longueur OS avec celle de l'arc $\overset{\frown}{AM}$, montrez que $\sin(x) \leq x$ pour $x > 0$.

(4) En comparant l'aire du secteur de disque délimité par les rayons OA et OM, avec l'aire du triangle OAT, montrez que $x \leq \tan(x)$ pour $x > 0$.

(5) Déduisez de (3) et (4) un encadrement de $\sin(x)$, puis trouvez la limite de $\sin(x)/x$ quand x tend vers 0 en restant positif.

(6) En terminale, comment a-t-on justifié la valeur de cette limite (si on l'a justifiée) ?