Suites définies par récurrence (h)

Fonctions contractantes et suites définies par récurrence

Pour les besoins de l'exercice h.1 on anticipe un peu sur le cours : on pourra utiliser notamment le théorème des accroissements finis et le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice h.1 Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On dit que f est *contractante sur* I si $f(I) \subset I$ et s'il existe un réel positif $k < 1$ tel que

$$\text{pour tout } (x, y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Vocabulaire : un intervalle tel que $f(I) \subset I$ est dit *stable* et le nombre k est appelé *rapport* de la contraction f.

(1) Supposons que f est dérivable sur I et que $k := \sup \{|f'(x)|, x \in I\}$ soit strictement inférieur à 1. Démontrez qu'alors f est contractante.

(2) Démontrez que f a un point fixe sur I. (*Indication : regardez la fonction définie par* $g(x) = f(x) - x$. *Montrez que* $g(a) \geq 0$ *et* $g(b) \leq 0$, *puis...*)

(3) Démontrez que ce point fixe est unique.

Exercice h.2 *Suites définies par récurrence par une fonction contractante.*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction contractante sur I, de rapport $k < 1$. On appelle ℓ son unique point fixe sur I (voir exercice h.1). On considère une suite de premier terme $u_0 \in I$ et définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) Montrez que pour tout $n \geq 0$ on a $|u_{n+1} - \ell| \leq k|u_n - \ell|$.

(2) Déduisez-en que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ.

(3) A-t-on déjà vu dans les exercices des suites définies par des fonctions contractantes ?

Exercice h.3 Donnez deux exemples de fonctions non contractantes.

(Vous pouvez jouer sur les domaines de définition (on n'est pas obligé de regarder que des intervalles *fermés* !) et sur la « grandeur » de la dérivée.)

Donnez un exemple de fonction non contractante f telle que quel que soit le premier terme u_0, toutes les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ divergent vers l'infini.

Suites adjacentes

Exercice h.4 On considére les deux suites de nombres rationnels

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}.$$

Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante. En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite : c'est le nombre e. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$n!\ u_n < n!\ e < n!\ u_n + \tfrac{1}{n}$$

En déduire que e est irrationnel.

Exercice h.5 (1) Soient a et b des réels > 0. Montrer que

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2},$$

et si $a \leqslant b$ que

$$a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b \qquad \text{et} \qquad a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b.$$

(2) Soient u_0 et v_0 des réels strictement positifs tels que $u_0 < v_0$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) par les relations de récurrence :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que $u_n \leq v_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

(3) Montrer que (v_n) est une suite décroissante et que (u_n) est croissante .

(4) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et qu'elles ont même limite.