Suites définies par récurrence (g)
$u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice g.1 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to I$ une fonction continue. Considérons la suite de premier terme u_0 et telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) Montrer que si f est croissante sur I alors (u_n) est monotone.

(2) Montrer que si f est dćroissante sur I alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.

(3) Montrer que si f est continue et si (u_n) converge, alors la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

Exercice g.2 Soient a et b deux réels strictement positifs ; on définit une suite (u_n) par :

$$u_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{au_n + b}$$

(1) Montrer qu'il existe une valeur de u_0 pour laquelle cette suite est stationnaire.

(2) Montrer que si u_0 est distinct de cette valeur, (u_n) est monotone et bornée. Trouver $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Exercice g.3 Étudier la suite définie par récurrence par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \cos u_n$, où a est un nombre réel donné.

Exercice g.4 Étudiez la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ dans les cas suivants (monotonie, convergence/divergence, limites...). Il sera utile de discuter selon la valeur de u_0.

$$f(x) = e^x \qquad\qquad f(x) = x^2 \qquad\qquad f(x) = e^{-x}$$

Exercice g.5 Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$. On considère $a \in [0,1]$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses :

1. Si f est croissante, alors (u_n) est croissante.
2. Si (u_n) est croissante, alors f est croissante.
3. Si (u_n) est croissante et f monotone, alors f est croissante.
4. Si (u_n) converge vers une limite l, alors l est point fixe de f.
5. Si f est dérivable, alors (u_n) est bornée.
6. Si le graphe de f est au dessus de la droite d'équation $y = x$, alors (u_n) est croissante.
7. Si (u_n) converge vers un point fixe l de f, alors f est continue en l.

Exercice g.6 Soit une suite qui vérifie une relation de récurrence homographique

$$u_n = \frac{au_{n-1}+b}{cu_{n-1}+d} \tag{1}$$

(1) Rappelez le nombre de points fixes d'une homographie en général, et dans le(s) cas particulier(s).

(2) Montrer que si l'homographie $x \mapsto y = \frac{ax+b}{cx+d}$ a deux points fixes distincts α et β, on peut écrire la relation (1) sous la forme : $\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta} = k\frac{u_{n-1}-\alpha}{u_{n-1}-\beta}$. Calculer $\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$ en fonction de $\frac{u_1-\alpha}{u_1-\beta}$.

(3) Montrer que si l'homographie a un seul point fixe γ, on peut mettre la relation (1) sous la forme : $\frac{1}{u_n-\gamma} = \frac{1}{u_{n-1}-\gamma} + k$. Calculer $\frac{1}{u_n-\gamma}$ en fonction de u_1.

(4) Utiliser la méthode précédente pour étudier les suites (u_n) définies par :

$$\text{a) } u_{n+1} = \frac{4u_n+2}{u_n+3}, \qquad \text{b) } u_{n+1} = \frac{-3u_n-1}{u_n-3},$$
$$\text{c) } u_{n+1} = \frac{5u_n-3}{u_n+1}, \qquad \text{d) } u_{n+1} = \frac{2u_n-1}{u_n+4}.$$

Discuter suivant les valeurs de u_1 ; préciser pour quelles valeurs de u_1 chaque suite est définie.

Complément sur le théorème de Césaro et ses variantes

Rappelons le théorème de Césaro ou théorème de la moyenne : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite ℓ, alors la suite de terme $\frac{u_1+\cdots+u_n}{n}$ est convergente et a pour limite ℓ.

Exercice g.7 Soit $x \in]0, 2\pi[$.

(1) On considère la suite définie, pour tout $n \geq 1$, par $s_n := \sqrt[n]{n! \sin(x)\sin(x/2)\ldots\sin(x/n)}$. Étudiez la convergence de cette suite et donnez sa limite éventuelle.

(2) Vous n'y arrivez pas ? Alors sautez une case et passez en (3).

(3) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs, convergente vers $\ell > 0$. Montrez que $\sqrt[n]{u_1u_2\ldots u_n}$ converge vers ℓ.
(*Indication : utilisez le théorème de Césaro pour la suite* $\ln(u_n)$.)

(4) Répondez à la question (1).

Exercice g.8 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que u_{n+1}/u_n converge et

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell > 0$$

En appliquant Césaro à la suite $v_n = \ln(u_{n+1}/u_n)$, montrez que $\sqrt[n]{u_n}$ converge vers ℓ.

Exercice g.9 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

(1) Montrez que si u_n tend vers $+\infty$, alors $\frac{u_1+\cdots+u_n}{n}$ tend vers $+\infty$.

(2) Montrez que si $u_n > 0$ et u_n converge vers 0, alors $\sqrt[n]{u_1u_2\ldots u_n}$ converge vers 0.

Exercice g.10 Faites l'ex. f.5, en vous inspirant de la démonstration du théorème de Césaro.