Suites (f)

Exercice f.1 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels, convergentes de limites ℓ et ℓ' respectivement.

(1) Montrez que $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell+\ell'$.

(2) Montrez que $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\ell'$.

Exercice f.2 Montrez que toute suite extraite d'une suite convergente est convergente, et a même limite que la suite de départ.

Exercice f.3 Montrer qu'une suite monotone dont une suite extraite converge est convergente.

Exercice f.4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Montrer que (u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n}) convergent (leurs limites n'étant pas nécessairement égales) si et seulement si (u_n) converge.

Exercice f.5 Soit u_n une suite de réels de limite $\ell \in \mathbb{R}$, et

$$v_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k u_k$$

Montrer que la suite ainsi définie converge vers ℓ.

Exercice f.6 $**$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On appelle *valeur d'adhérence* de la suite, tout nombre $\ell\in\mathbb{R}$ qui est la limite d'une suite extraite convergente de (u_n).

(1) Donnez un exemple de suite qui n'admet pas de valeur d'adhérence.

En fait, s'il existe une suite extraite qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), on dira bien souvent par un léger abus de langage que $+\infty$ (resp. $-\infty$) est une valeur d'adhérence. On adopte cette convention dans la suite de l'exercice.

(2) Montrez que si (u_n) est convergente de limite ℓ, alors sa seule valeur d'adhérence est ℓ.

(3) Montrez que réciproquement, si la seule valeur d'adhérence est ℓ, alors la suite converge vers ℓ.

Remarque : avec la convention sur les valeurs d'adhérence infinies, on peut démontrer que toute suite a une valeur d'adhérence.