Suites (e)

Exercice e.1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Montrez que si les suites extraites $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent toutes les deux vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Montrez que le résultat est encore vrai si $\ell = +\infty$, i.e. si les suites extraites tendent vers $+\infty$.

Exercice e.2 Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

n'est pas convergente.

Exercice e.3 Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1. Si une suite positive est non majorée, elle tend vers $+\infty$.
2. Si une suite d'entiers converge, elle est stationnaire.
3. Si une suite a un nombre fini de valeurs, elle converge si et seulement si elle est stationnaire.
4. Une suite est convergente si et seulement si elle est bornée.
5. Si une suite n'est pas majorée, elle est minorée.

Exercice e.4 Calculer, lorsqu'elles convergent, les limites des suites définies par :
$u_n = n - \sqrt{n^2 - n}$ $\quad u_n = \sqrt{n(n+a)} - n$ $\quad u_n = \frac{n}{2}\sin\frac{n\pi}{2}$ $\quad u_n = \frac{\sin n^2 - \cos n^3}{n}$.

Exercice e.5 Soit $n \geqslant 1$.

1. Montrer que l'équation $\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$ admet une unique solution a_n dans $[0,1]$.
2. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$.
3. Montrer que (a_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

Exercice e.6 Soit (u_n) une suite qui tend vers 0. On pose $x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$. Montrer que (x_n) converge vers 0 (on pourra fixer ϵ puis séparer la somme en deux et enfin choisir N...).

Exercice e.7 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle dont tous les termes sont non nuls et telle que :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0.$$

Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Exercice e.8 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers ℓ et ϕ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$. (pas nécessairement strictement croissante !). Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_{\phi(n)} = \ell$.

Exercice e.9 $*$

Calculer suivant les valeurs de x : $\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty}[\cos(n!\pi x)]^{2m}\right]$.

Exercice e.10 Que peut-on dire de deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes dans $[0,1]$ et dont le produit tend vers 1 ?

À faire chez vous pour vous entraîner :

Exercice e.11 On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$.

(1) Faire une étude rapide de la fonction f.

On considère maintenant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{n-3}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

(2) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

(3) Démontrer que la suite (u_n) est borné.

(4) Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice e.12 Construire une suite $u_n = v_n w_n$ (resp. $v_n + w_n$) convergente et telle que l'une au moins des suites (v_n) et (w_n) diverge.

Exercice e.13 $*$

Vrai ou faux : il existe une suite (u_n) telle que $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0 et qui diverge.