L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels (d)

Exercice d.1 Le maximum de 2 nombres x, y est noté $\max(x, y)$. De même on note $\min(x, y)$ le minimum de x et y. Démontrez que :

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Exercice d.2 Calculer $\inf A$ et $\sup A$, ainsi que le plus grand élément et le plus petit élément de A (c'est-à-dire $\max(A)$ et $\min(A)$), s'ils existent, dans les cas suivants :

$$A = [-1, 1[,\ A = \mathbb{Q}_-,\ A = \{1/n, n \in \mathbb{N}^*\},\ A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$$

Exercice d.3 Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0,1] \cap \mathbb{Q}\ ,\ ]0,1[\cap\mathbb{Q}\ ,\ \mathbb{N}\ ,\ \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\ ,\ n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Exercice d.4 Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. Vrai ou faux ?

1. $A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$,
2. $B \subset A \Rightarrow \inf A \leq \inf B$,
3. $\sup A \cup B = \max(\sup A, \sup B)$,
4. $\sup(A + B) < \sup A + \sup B$,
5. $\sup(-A) = -\inf A$,
6. $\sup A + \inf B \leq \sup(A + B)$.

Exercice d.5 Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que pour tout x de A et tout y de B on ait $x < y$. Démontrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leqslant \inf B$.

Exercice d.6 On rappelle qu'un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ est dit *dense dans* $\mathbb{R}$ si tout intervalle non vide de $\mathbb{R}$ contient un élément de D.

(1) L'ensemble $\mathbb{Q}$ est-il dense dans $\mathbb{R}$?

(2) Montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice d.7 Soit $E := \{\frac{1}{n}\cos n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$; calculer $\inf E$ et $\sup E$.

Exercice d.8 Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in A, [x-1, x+2] \subset A.$$

Montrer que $A = \emptyset$ ou $A = \mathbb{R}$.

Exercice d.9 **
Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$ pour l'addition. On veut montrer que

- soit G est de la forme $a\mathbb{Z}$ (on note ainsi l'ensemble des réels de la forme an avec $n \in \mathbb{Z}$)
- soit G est dense dans $\mathbb{R}$.

On pose $A = G \cap \mathbb{R}_+^*$ et $a = \inf A$.

(1) On suppose que $a \in A$.

(a) Soit $x \in G$. Montrer que si $x \notin a\mathbb{Z}$ alors il existe $y \in G \cap]0, a[$ (on pourra utiliser l'entier $n = E(x/a)$). Déduire une contradiction.

(b) En déduire que $G \subset a\mathbb{Z}$ puis que $G = a\mathbb{Z}$.

(2) On suppose que $a \notin A$. Soit $]x, y[\subset \mathbb{R}$, avec $x < y$. On pose $\alpha = y - x$.

(a) Montrer qu'il existe $b, c \in A$ tels que $a < b < c < a + \alpha$. En déduire qu'il existe $g \in G$ avec $0 < g < \alpha$.

(b) En déduire qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $ng \in]x, y[$. En déduire que $G \cap]x, y[$ est non vide.

(c) Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

(3) Conclusion?