Injections, surjections, bijections, composées (c)

Injections, surjections, bijections

Exercice c.1 Soient E et F deux ensembles finis représentés par des « patates ». On note m et n leurs cardinaux respectifs.

(1) Quand existe-t-il une injection $f\colon E \to F$? Faites un dessin.

(2) Quand existe-t-il une surjection $g\colon E \to F$? Faites un dessin.

(3) Quand existe-t-il une bijection $h\colon E \to F$? Faites un dessin.

Exercice c.2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - x$. Cette fonction est-elle injective ? surjective ?

Exercice c.3 Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. En vous inspirant de l'exercice b.2, démontrez par l'absurde qu'il n'existe pas de bijection $f\colon E \to \mathcal{P}(E)$.

Applications composées

Exercice c.4 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x+1$ et $g(x) = x^2 - 1$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Exercice c.5 Soient E, F, G trois ensembles et $f\colon E \to F$, $g\colon F \to G$ deux applications.

(1) Montrez que si $g \circ f$ est injective et f est surjective alors g est injective.

(2) Montrez que si $g \circ f$ est surjective et g est injective alors f est surjective.

(3) Montrez que $g \circ f$ est bijective si et seulement si f et g sont bijectives.

Images et images réciproques de parties

Exercice c.6 Soit f la fonction de l'exercice **??**. Déterminer $f^{-1}([-1, 1])$ et $f(\mathbb{R}_+)$.

Exercice c.7 Soit $f : X \to Y$. Montrer que

1. $\forall B \subset Y$, $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$.
2. f est surjective ssi $\forall B \subset Y$, $f(f^{-1}(B)) = B$.
3. f est injective ssi $\forall A \subset X$, $f^{-1}(f(A)) = A$.
4. f est bijective ssi $\forall A \subset X$, $f(\complement A) = \complement f(A)$.

Exercice c.8 Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n \quad ; \quad f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto -n$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 \quad ; \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$$

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2.$$

Exercice c.9 Soit X un ensemble. Si $A \subset X$ on note χ_A la fonction caractéristique associée, qui est la fonction $X \to \{0,1\}$ définie par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon. Montrer que

$$\Phi \colon \begin{cases} \mathcal{P}(X) \to \mathcal{F}(X, \{0,1\}) \\ A \mapsto \chi_A \end{cases}$$

est une bijection.

Exercice c.10 Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

(1) $f \colon \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$

(2) $g \colon \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$

(3) $h \colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y) \end{cases}$

(4) $k \colon \begin{cases} \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x+1}{x-1} \end{cases}$