Introduction au langage mathématique (b)

Raisonnement par l'absurde

Exercice b.1

1. Soient $p_1, p_2, \ldots, p_r$ des nombres premiers. Montrer que l'entier $N = p_1 p_2 \ldots p_r + 1$ n'est divisible par aucun des entiers p_i.

2. Utiliser la question précédente pour montrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice b.2 Soit X un ensemble et f une application de X dans l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X. On note A l'ensemble des $x \in X$ vérifiant $x \notin f(x)$. Démontrer par l'absurde qu'il n'existe aucun $x \in X$ tel que $A = f(x)$.
(*Indication : s'il existe un tel x, distinguer le cas où $x \in A$ et le cas où $x \notin A$.*)

Raisonnement par récurrence

Exercice b.3 Comparer 3^n et $n!$.

Parfois la récurrence forte s'impose :

Exercice b.4 Démontrer par récurrence que tout nombre entier $n \geq 2$ est un produit de nombres premiers.

D'autres fois, renforcer la propriété à démontrer peut (paradoxalement) simplifier la tâche :

Exercice b.5 Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ on a

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2$$

(*Indication : plutôt que de démontrer que c'est < 2, démontrez que c'est $< 2 - 1/n$*).

Attention à l'initialisation :

Exercice b.6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle $P(n)$ la propriété « $u_n = 2^n$ » et $Q(n)$ la propriété « $u_n = 2^n + 1$ ».

1. Montrez que les propriétés $P(n)$ et $Q(n)$ sont héréditaires.

2. Montrez que $P(n)$ est toujours fausse et que $Q(n)$ est toujours vraie.