

Introduction au langage mathématique (a)

Exercice a.1 Donnez la relation entre les opérations \cup , \cap pour les ensembles (d'une part) et les connecteurs logiques (d'autre part).

Exercice a.2 Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : \iff , \Leftarrow , \Rightarrow .

1. $x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 4 \dots\dots x = 2$;
2. $z \in \mathbb{C} \quad z = \bar{z} \dots\dots z \in \mathbb{R}$;
3. $x \in \mathbb{R} \quad x = \pi \dots\dots e^{2ix} = 1$.

Exercice a.3 Soient R et S des propositions. Donner la négation de $R \Rightarrow S$.

Exercice a.4 Les propositions suivantes sont-elles vraies, pour n entier :

1. n pair ssi n^2 pair
2. n divisible par 3 ssi n^2 divisible par 3
3. n divisible par 4 ssi n^2 divisible par 4

Exercice a.5 On considère les deux propositions :

$$P: \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 \cos(y) > 0$$

$$Q: \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \cos(y) > 0$$

Y a-t-il un lien logique (implication, équivalence...) entre elles ? Sont-elles vraies ? Mêmes questions en remplaçant $x^2 \cos(y)$ par $x \cos(y)$.

Exercice a.6 Vous savez démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel (sinon, remédiez rapidement à cette lacune). Dans cet exercice on se pose la question de démontrer qu'il existe deux nombres irrationnels a et b tels que a^b est rationnel.

1. Supposant que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, résolvez la question.
2. Supposant que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ n'est pas rationnel, résolvez la question (*Indication : calculez $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$*).

Savez-vous si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel ou non ?

Exercice a.7 Soient A, B, C, D quatre propositions. Montrez l'équivalence suivante :

$$(A \text{ ou } B) \text{ et } (C \text{ ou } D) \iff (A \text{ et } C) \text{ ou } (A \text{ et } D) \text{ ou } (B \text{ et } C) \text{ ou } (B \text{ et } D).$$

Comme application, résolvez (en justifiant) le système :

$$\begin{cases} (x - 1)(y - 2) = 0 \\ (x - 2)(y - 3) = 0 \end{cases}$$

Exercice a.8 Représentez les parties correspondant aux propositions suivantes, portant sur des nombres réels :

1. $\text{non}(-1 < x < 5)$
2. $\text{non}(0 < x \text{ et } y > 3)$

Exercice a.9 Sur l'ensemble F des femmes, on considère la proposition $P(x, y)$: « x est la fille de y ». Traduisez les phrases suivantes en termes de quantificateurs :

1. On peut trouver deux femmes dont l'une est la fille de l'autre.
2. Il y a une femme qui est la fille de toutes les autres.
3. Toute femme a au moins une fille.
4. On peut trouver une femme mère de toutes les autres.
5. Toute femme a une mère.
6. Toute femme est fille de toute femme.

Pour chacune des expressions obtenues, traduisez ce qui se passe quand on remplace $P(x, y)$ par sa négation.

Exercice a.10 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et ℓ un réel. Écrivez la négation de l'énoncé mathématique :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$