

Exercices pour vous entraîner (I)

Exercice I.1 Les propositions suivantes sont-elles vraies ? Sinon énoncer leur négation.

1. $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 > 5$
2. $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > 5$
3. $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x^2$
4. $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, y > x^2$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y \leq z$

Exercice I.2 Soit f, g deux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

- (1) f est majorée ;
- (2) f est bornée ;
- (3) f est paire ;
- (4) f est impaire ;
- (5) f ne s'annule jamais ;
- (6) f est périodique ;
- (7) f est croissante ;
- (8) f est strictement décroissante ;
- (9) f n'est pas la fonction nulle ;
- (10) f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts ;
- (11) f atteint toutes les valeurs de \mathbb{N} ;
- (12) f est inférieure à g ;
- (13) f n'est pas inférieure à g .

Exercice I.3 On définit une fonction $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ de la manière suivante. On pose $f(0) = 0$ et

$$f(n+1) = \begin{cases} 2f(n/2) + 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ f(n-1) + 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Montrer par récurrence sur n que $f(n) = n$.