DEVOIR A LA MAISON. CORRIGÉ.

Exercice 1

1) A est inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$ donc minoré par 0. De plus A est non vide: en effet, G contient un élément g non nul, et soit $g > 0$, auquel cas $g \in A$, soit $g < 0$, auquel cas $-g > 0$ et $-g \in G$, donc $-g \in A$.

Donc $infA$ existe et $infA \geq 0$.

2) a) Le réel x appartient à G, $n = E(x/a)$ est un entier relatif et par hypothèse, a appartient à A donc à G; d'après les propriétés d'un groupe, $x - na \in G$.

De plus $n \leq x/a < n + 1$ d'après la définition de la partie entière. Donc $an \leq x < a(n + 1)$, et donc $0 \leq x - na < a$. On a donc $x - na \in [0, a[$. De plus $x - na \neq 0$, sinon on aurait $x = na$ et donc, $x \in a\mathbb{Z}$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Par conséquent, $x - na \in]0, a[$.

Finalement, on déduit que $x \in G \cap]0, a[$. Mais alors $x \in A$ et $x < a$, ce qui contredit la définition de $a = infA$.

b) Soit $x \in G$ arbitraire. D'après a), si $x \notin a\mathbb{Z}$, on obtient une contradiction. Donc $x \in a\mathbb{Z}$.

Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}, x \in G \Rightarrow x \in a\mathbb{Z}$. En d'autres termes, $G \subset a\mathbb{Z}$.

Par ailleurs $a \in G$, et par les lois de groupe, $\forall n \in \mathbb{Z}, na \in G$, c'est-à dire $a\mathbb{Z} \subset G$.

Par double inclusion, on a donc $G = a\mathbb{Z}$.

3) a) Par définition d'une borne inférieure, $a = infA$ implique

$$\forall z > a, \exists z' \in A, a \leq z' < z.$$

Comme de plus, $a \notin A$, on ne peut avoir $a = z'$ dans cette assertion, donc on a $a < z'$. Appliquons ceci pour $z = a + \alpha$, on trouve $c \in A$ avec $a < c < a + \alpha$. Appliquons la proposition de nouveau pour $z = c$, on trouve $b \in A$ avec $a < b < c$. Donc $a < b < c < a + \alpha$.

On en déduit que $0 < c - b < \alpha$. De plus c et b sont dans A donc dans G, donc $c - b \in G$, car G est un groupe. Donc $g = c - b$ convient.

b) Trouver n entier tel que ng est dans $]x, y[$ revient à trouver n entier dans $]x/g, y/g[$. Or cela est possible car la longueur de l'intervalle $]x/g, y/g[$ est strictement plus grande que 1 (elle vaut $(y - x)/g = \alpha/g > 1$). Vérifions le en montrant que $n = E(x/g) + 1$ convient:

D'une part, $x/g < E(x/g) + 1$ par définition de la partie entière. D'autre part, $E(x/g) + 1 \leq \frac{x}{g} + 1 = \frac{x+g}{g} < \frac{x+\alpha}{g} = \frac{y}{g}$. On a donc bien que $n = E(x/g) + 1$ est un entier qui appartient à l'intervalle $]x/g, y/g[$, et satisfait donc $ng \in]x, y[$.

Comme $g \in G$, $ng \in G$ et donc $G \cap]x, y[$ contient ng, donc est non vide.

c) On a montré que tout intervalle non vide $]x, y[$ de $\mathbb{R}$ contient au moins un élément de G: c'est par définition dire que G est dense dans $\mathbb{R}$.

4) On a montré que si $a \in A$, alors $G = a\mathbb{Z}$, et que si $a \notin A$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$. Donc, un sous-groupe non réduit à $\{0\}$ de $\mathbb{R}$ est soit dense dans $\mathbb{R}$, soit de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$.

Remarque: ces deux propriétés sont exclusives, c'est à dire, un sous-groupe de la forme $a\mathbb{Z}$ n'est jamais dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2

1) Une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en x_0 si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

2) D'abord, on a $0 \in G$ car $0 = 0 + 2\pi \times 0$.

Par ailleurs, si x et y sont deux éléments de G alors ils s'écrivent $x = a + 2\pi b$ et $y = c + 2\pi d$ avec a, b, c, d entiers relatifs. Donc $x - y = (a - c) + 2\pi(b - d)$ est un élément de G. Il s'ensuit que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

3) Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $G = a\mathbb{Z}$. Alors forcément $a \neq 0$ car $G \neq \{0\}$. De plus comme $1 \in G$ et $2\pi \in G$, il existe deux entiers relatifs m, n (évidemment non nuls) tels que $1 = am$ et $2\pi = an$. Ainsi $2\pi = \frac{2\pi}{1} = \frac{an}{am} = n/m$. On obtient que π est un nombre rationnel, ce qui est faux comme il est bien connu. Par contraposée, G n'est pas un sous-groupe de la forme $a\mathbb{Z}$.

4) D'après le résultat principal de l'exercice 1, comme G n'est pas de la forme $a\mathbb{Z}$, il est dense dans $\mathbb{R}$. En particulier, le point α est dans l'adhérence de G, et donc pour tout $n > 0$ on a $G \cap]\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n}[\neq \emptyset$. Cela veut dire qu'il existe un élément $g_n \in G$ qui est à distance inférieure à $1/n$ de α. Le choix d'un tel g_n pour chaque n donne donc une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers α, par définition de la convergence.

5) Comme $g_n \in G$, il existe des entiers relatifs a_n, b_n tels que $g_n = a_n + 2\pi b_n$. Posons $k_n = |a_n|$. C'est un entier naturel et on a $\cos(g_n) = \cos(a_n + 2\pi b_n) = \cos(a_n) = \cos(|a_n|) = u_{k_n}$. Par ailleurs, comme la fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$, donc en α, et comme $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α, la suite de terme $\cos(g_n)$ converge vers $\cos(\alpha) = \ell$. On a construit une suite $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $(u_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

6) Notons U l'ensemble $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ et montrons que tout nombre $\ell \in [-1, 1]$ est dans l'adhérence de U. Soit $\epsilon > 0$ fixé, on sait d'après la question 5) qu'il existe une suite $(u_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ (a priori ce n'est pas une sous-suite de (u_n), car k_n n'est pas strictement croissante ; mais peu importe). Donc il existe un entier N tel que $|u_{k_N} - \ell| < \epsilon$ (et même $|u_{k_n} - \ell| < \epsilon$ pour tout $n \geq N$, mais on n'en a pas besoin). Comme $u_{k_N} \in U$, cela siginifie que U est dense dans $[-1, 1]$.

7) D'abord, il est clair qu'un ensemble $G = \mathbb{Z} + r\mathbb{Z}$ est un sous-groupe du groupe additif $\mathbb{R}$, pour les mêmes raisons que dans la question 2). On a vu dans la question 3) que si G est de la forme $a\mathbb{Z}$, alors forcément $a \neq 0$ et il existe deux entiers relatifs non nuls m, n tels que $1 = am$ et $r = an$, donc $r = \frac{r}{1} = \frac{an}{am} = n/m$. Donc on doit avoir $r \in \mathbb{Q}$.

Réciproquement, supposons que $r \in \mathbb{Q}$ et démontrons que $G = \mathbb{Z} + r\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de la forme $a\mathbb{Z}$.

Si $r = 0$, c'est évident puisque $G = \mathbb{Z} + r\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

Si $r \neq 0$, comme $G = \mathbb{Z} + r\mathbb{Z} = \mathbb{Z} + (-r)\mathbb{Z}$, on peut supposer pour le raisonnement que $r > 0$. On peut écrire $r = p/q$ avec p et q entiers naturels premiers entre eux. Soit $d = \mathrm{pgcd}(p, q)$, de sorte que $p = dp'$ et $q = dq'$ avec p' et q' entiers. On va montrer que $G = \alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha = d/q$. Soit $x = a + rb$ avec a et b entiers, un élément de G. Alors

$$a + rb = a + \frac{p}{q}b = \frac{aq + pb}{q} = (aq' + bp')\alpha$$

C'est un élément de $\alpha\mathbb{Z}$, on a donc $G \subset \alpha\mathbb{Z}$. Pour l'inclusion opposée, d'après le théorème de Bézout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $up + vq = d$. Alors $\alpha = \frac{d}{q} = \frac{up+vq}{q} = v + ur$ donc $\alpha \in \mathbb{Z} + r\mathbb{Z}$. Comme $\mathbb{Z} + r\mathbb{Z}$ est un sous-groupe, on en déduit que $\alpha n \in \mathbb{Z} + r\mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, donc $\alpha\mathbb{Z} \subset G$. En conclusion $G = \alpha\mathbb{Z}$.

Donc le sous-groupe $\mathbb{Z} + r\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ est de la forme $a\mathbb{Z}$ si et seulement si $r \in \mathbb{Q}$, et dans ce cas, on a aussi $a \in \mathbb{Q}$.