DEVOIR A LA MAISON

Exercice 1

Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$ pour l'addition, qui n'est pas réduit à $\{0\}$. On se propose de montrer que soit G est dense dans $\mathbb{R}$, soit G est de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$.

On pose $A = G \cap \mathbb{R}_+^*$.

(1) Montrer que $\inf A$ existe et que $\inf A \geqslant 0$. On pose $a = \inf A$.

(2) On suppose que $a \in A$.

a) Soit $x \in G$. Montrer que si $x \notin a\mathbb{Z}$ alors $x - E(x/a)a \in G \cap]0, a[$. Déduire une contradiction.

b) En déduire que $G \subset a\mathbb{Z}$ puis que $G = a\mathbb{Z}$.

(3) On suppose que $a \notin A$.

Soit $]x, y[\subset \mathbb{R}$, avec $x < y$. On pose $\alpha = y - x$.

a) Montrer qu'il existe $b, c \in A$ tels que $a < b < c < a + \alpha$. En déduire qu'il existe $g \in G$ avec $0 < g < \alpha$.

b) En déduire qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $ng \in]x, y[$. En déduire que $G \cap]x, y[$ est non vide.

c) Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

(4) Conclusion?

Exercice 2

Dans cet exercice on démontre que l'ensemble des valeurs de la suite de terme $u_n = \cos(n)$ est dense dans $[-1, 1]$, comme application de l'exercice précédent.

(1) Donner la définition de la continuité d'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en un point $x_0 \in \mathbb{R}$.

On admet dans la suite que la fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$.

(2) On considère l'ensemble défini par

$$G = \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = \{ \ x \in \mathbb{R} \ ; \ \exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \ x = a + 2\pi b \ \}$$

Montrer que c'est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

(3) Montrer que G n'est pas de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

(4) On fixe un réel $\ell \in [-1, 1]$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\alpha) = \ell$. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G qui converge vers α.

(5) En déduire qu'il existe une suite d'entiers $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(u_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

(6) Déduisez-en que $\{ \ u_n, \ n \in \mathbb{N} \ \}$ est dense dans $[-1, 1]$.

(7) (Question bonus) À quelle condition sur $r \in \mathbb{R}$ l'ensemble

$$G = \mathbb{Z} + r\mathbb{Z} = \{ \ x \in \mathbb{R} \ ; \ \exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \ x = a + rb \ \}$$

est-il un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ de la forme $a\mathbb{Z}$?