Devoir de révision

— Durée : 1 heure 45 —

Il sera tenu compte de la rigueur (théorèmes utilisés cités correctement).

Exercice 1

1. Suivons les indications.

a. La fonction f est continue sur l'intervalle fermé borné $[a;b]$, donc elle est bornée et atteint ses bornes (on pourrait même être plus précis et dire que l'image de $[a;b]$ est un segment). Donc, les quantités $m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ et $M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ sont bien définies. Par ailleurs, par définition de m et M on a, pour tout $x \in [a;b]$, $m \leq f(x) \leq M$.

b. Comme $g(x) \geq 0$ sur $[a;b]$, on peut multiplier par $g(x)$ dans l'inégalité $m \leq f(x) \leq M$ et obtenir $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$.

c. On sait qu'on peut intégrer les inégalités, donc en intégrant celle de la question précédente on obtient

$$m \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M \int_a^b g(x)\,dx$$

d. Soit $I = \int_a^b g(x)\,dx$. On a $I \geq 0$ car $g(x) \geq 0$ sur $[a;b]$. Supposons d'abord que $I = 0$. Dans ce cas, tous les termes sont nuls dans l'inégalité de (c) et donc on peut prendre $c = a$ par exemple.

Si $I > 0$, alors de (c) on déduit

$$m \leq \frac{1}{I} \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires pour la fonction continue f sur $[a;b]$, il existe donc $c \in [a;b]$ tel que $\frac{1}{I} \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)$.

e. L'égalité précédente se réécrit :

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c) \int_a^b g(x)\,dx$$

C'est le résultat.

2. Suivons les indications.

   Comme h admet une dérivée par hypothèse, elle est continue. Il en découle que $t \mapsto h(t)k(t)$ est continue sur $[a;b]$ donc intégrable. Par ailleurs comme k est continue elle admet des primitives sur $[a;b]$, par exemple $K(t) = \int_a^t k(u)\,du$. En intégrant par parties on a

$$\int_a^b h(t)k(t)\,dt = [h(t)K(t)]_a^b - \int_a^b h'(t)K(t)\,dt \tag{1}$$

   Comme h est croissante – et dérivable – on a $h'(t) \geq 0$ sur $[a;b]$, donc on peut utiliser la première formule de la moyenne avec $f = K$ et $g = h'$. On obtient qu'il existe $d \in [a;b]$ tel que

$$\int_a^b h'(t)K(t)\,dt = K(d)\int_a^b h'(t)\,dt$$

   Or $\int_a^b h'(t)\,dt = h(b) - h(a)$ et $K(d) = \int_a^d k(u)\,du$ (voir la définition de K ci-dessus). Pour préparer le calcul qui vient on peut aussi écrire que $K(b) = \int_a^b k(u)\,du = \int_a^d k(u)\,du + \int_d^b k(u)\,du$. En reprenant le calcul de (1) on a

$$\begin{aligned}\int_a^b h(t)k(t)\,dt &= h(b)K(b) - h(a)K(a) - (h(b)-h(a))\int_a^d k(u)\,du \\ &= h(b)\left(\int_a^d k(u)\,du + \int_d^b k(u)\,du\right) - (h(b)-h(a))\int_a^d k(u)\,du \\ &= h(a)\int_a^d k(t)\,dt + h(b)\int_d^b k(t)\,dt\end{aligned}$$

   (Noter que $K(a) = 0$). C'est le résultat.

Exercice 2

Suivons l'indication et posons $u = \sqrt{e^x+1}$. C'est un changement de variable autorisé, car sur $I = [\ln 3; \ln 8]$ la fonction $x \mapsto \sqrt{e^x+1}$ est de classe C^∞ et strictement croissante, en particulier elle est de classe C^1 et bijective.

Si $x = \ln 3$ on a $u = 2$, et si $x = \ln 8$ on a $u = 3$. De plus, $u = \sqrt{e^x+1}$ équivaut à $x = f(u) = \ln(u^2-1)$ dont la dérivée par rapport à u s'écrit $f'(u) = \frac{2u}{u^2-1}$. Donc la formule de changement de variables donne

$$\int_{\ln 3}^{\ln 8} \sqrt{e^x+1}\,dx = \int_2^3 u\frac{2u}{u^2-1}\,du = 2\int_2^3 \frac{u^2}{u^2-1}\,du = 2\int_2^3 \frac{u^2-1+1}{u^2-1}\,du = 2\int_2^3 \left(1 + \frac{1}{u^2-1}\right)\,du$$

La fonction $u \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{1-u}{1+u}\right|\right)$ est une primitive de $\frac{1}{u^2-1}$ sur $]1;+\infty[$. Ainsi

$$\int_{\ln 3}^{\ln 8} \sqrt{e^x+1}\,dx = 2 - \left[\ln\left(\left|\frac{1-u}{1+u}\right|\right)\right]_2^3 = 2 - (-\ln 2 + \ln 3) = 2 - \ln 2 + \ln 3$$