LM115, Mime 4/5

Devoir de révision

— Durée : 1 heure 45 —

Il sera tenu compte de la rigueur (théorèmes utilisés cités correctement).

Exercice 1

1. Première formule de la moyenne.

   Soient f et g deux fonctions numériques, définies, continues sur $[a;b]$. On suppose $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a;b]$.

   Montrer qu'il existe un point $c \in [a;b]$ tel que

   $$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$$

   Indications :

   a. Introduire $m = \inf_{x\in[a;b]} f(x)$ et $M = \sup_{x\in[a;b]} f(x)$. Justifier leur existence et comparer m, f et M.

   b. Comparer $m \times g$, $f \times g$ et $M \times g$ (justifier).

   c. Intégrer sur $[a;b]$ (justifier).

   d. Utiliser, en le justifiant, le théorème des valeurs intermédiaires pour f sur $[a;b]$.

   e. Conclure.

2. Deuxième formule de la moyenne.

   Soient h et k deux fonctions numériques, définies sur $[a;b]$.

   On suppose h croissante et admettant une dérivée continue sur $[a;b]$ et k continue sur $[a;b]$.

   Montrer qu'il existe un point $d \in [a;b]$ tel que

   $$\int_a^b h(t)k(t)\,dt = h(a)\int_a^d k(t)\,dt + h(b)\int_d^b k(t)\,dt$$

   Indications : Intégrer $\int_a^b h(t)k(t)\,dt$ par parties et utiliser la première formule de la moyenne pour les fonctions K et h', où K est une primitive de k (justifier son existence).

Exercice 2

Calculer l'intégrale :

$$\int_{\ln 3}^{\ln 8} \sqrt{e^x+1}\,dx$$

Indication : faire le changement de variable : $u = \sqrt{e^x+1}$.