Devoir de révision : la méthode de Newton

Commentaires pour vos révisions : après avoir lu la "présentation", tous les exercices peuvent être faits indépendamment (même s'il est mieux de les faire tous dans l'ordre), à une question près dans l'exercice 3. L'exercice 1 comprend trop de tracés pour être donné en examen, mais il est intéressant pour dessiner des exemples et comprendre ce qu'il se passe. Pour votre entraînement, une possibilité est de ne travailler "en temps limité" qu'à partir de l'exercice 2. (Éventuellement, tracez les graphes et lisez le corrigé pour avoir les commentaires.)

L'exercice 2 donne la relation de récurrence qui définit la suite de Newton. L'exercice 4 est le plus important, et sans doute aussi le plus délicat. L'exercice 5 n'est pas très difficile mais il peut être un peu long ; il est très intéressant pour voir l'efficacité de la théorie sur un exemple.

Présentation : On s'intéresse à la *méthode de Newton* pour construire à l'aide d'une suite des approximations d'un zéro α d'une fonction suffisamment dérivable $f\colon I \to \mathbb{R}$. Le principe de la méthode est le suivant. On choisit un élément $x_0 \in I$, si possible assez proche de α. C'est le premier terme de la suite, placé sur l'axe des abscisses en $(x_0, 0)$. On considère le point correspondant $(x_0, f(x_0))$ sur la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f. Le point d'intersection de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en ce point avec l'axe des abscisses est noté $(x_1, 0)$. En considérant la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $(x_1, f(x_1))$ on construit x_2, puis x_3,...

Exercice 1 *Dessiner la suite de Newton.*
On considère les six fonctions ci-dessous, ayant toutes $\alpha = \sqrt{2}$ pour zéro :

$$\begin{array}{ll} f\colon x \mapsto x^2 - 2 & i\colon x \mapsto (x-\sqrt{2})^4 + \frac{1}{2}(x-\sqrt{2}) \\ g\colon x \mapsto x^2 - \sqrt{3}x + (\sqrt{6}-2) & j\colon x \mapsto \frac{1}{8}(e^{4(x-\sqrt{2})} - 1) \\ h\colon x \mapsto x^2 - 2x + (2\sqrt{2}-2) & k\colon x \mapsto \frac{1}{2}(x-\sqrt{2}) \end{array}$$

et les suites de Newton associées $(x_n^f), (x_n^g), \dots, (x_n^k)$ en partant de $x_0 = 1$ à chaque fois.

(1) Donnez un tableau des valeurs en $x = \sqrt{2}$ des dérivées premières et secondes des six fonctions.

(2) Tracez sur un même graphe les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les quatre premiers termes des suites associées (i.e. x_0 à x_3). Faites le tracé avec $x \in [0,9; 2,1]$ et $y \in [-1,2; 1,2]$, et prenez pour échelle : 1 unité = 20 cm sur l'axe des abscisses et 1 unité = 5 cm sur l'axe des ordonnées ([1]).

Que se passe-t-il pour la fonction h ? (Calculez $h'(1)$.)

(3) Tracez sur un même graphe les courbes représentatives $\mathscr{C}_i$ et $\mathscr{C}_j$ et les termes x_0 à x_3 associés. Faites le tracé avec $x \in [0,9; 2,1]$ et $y \in [-0,2; 0,7]$, et prenez pour échelle : 0,1 unité = 1,5 cm sur l'axe des abscisses et 0,1 unité = 3 cm sur l'axe des ordonnées. (Vous ne pourrez pas placer le point $(x_1^j, j(x_1^j))$ sur le graphe. On donne la valeur $x_2^j \approx 1,83$ pour tracer les suivants.)

Que se passe-t-il pour la fonction k ?

(4) Classez les fonctions f et g selon la vitesse de convergence apparente de la suite de Newton. Comment pouvez-vous expliquer ce classement ?

(5) Classez les fonctions i, j et k selon la vitesse de convergence apparente de la suite de Newton. Comment pouvez-vous expliquer ce classement ?

(6) Expliquez pourquoi les fonctions g, h, i, j, k ne sont pas très adaptées au problème si on veut calculer des approximations de $\sqrt{2}$.

[1] Si vous n'en avez pas, du papier millimétré est disponible sur http://www.math.jussieu.fr/~romagny.

Exercice 2 *La relation de récurrence $x_{n+1} = \varphi(x_n)$.*

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que f' ne s'annule pas. On appelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Newton définie par f à partir d'un élément $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé.

(1) Donnez l'équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}_n$, tangente au graphe de f au point $(x_n, f(x_n))$.

(2) Justifiez que $\mathscr{D}_n$ coupe l'axe des abscisses, et donnez l'expression de x_{n+1}.

Exercice 3 *Un exemple.*

On étudie plus précisément la suite obtenue en partant de $f(x) = x^2 - 2$ et $x_0 = 1$.

(1) Donnez l'expression $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ en fonction de x_n, telle que donnée dans l'exercice 2 question (2). Justifiez que la suite (x_n) est bien définie i.e. que $x_n \neq 0$ pour tout n.

(2) Montrez par récurrence que $x_n \geq 1$ puis que $|x_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}|^2$.

(3) Déduisez-en que $|x_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^{2^n}}$.

(4) Combien de décimales exactes de $\sqrt{2}$ obtient-on avec x_5 ? Avec x_{10} ?

Exercice 4 *Étude théorique.*

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle I. On suppose qu'elle a un zéro $\alpha \in I$ tel que $f'(\alpha) \neq 0$. On fait maintenant une étude théorique plus poussée de la suite définie par la méthode de Newton (voir exercice 2) :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Le choix de x_0 sera fait ultérieurement.

(1) Démontrez qu'il existe un segment $J = [a, b]$ contenant α et tel que f' ne s'annule pas sur J.

Un segment J comme ci-dessus étant choisi, on introduit les quantités

$$i := \inf_{x\in J} |f'| \qquad \text{et} \qquad s := \sup_{x\in J} |f''|$$

(on a vu dans l'exercice 1, questions (4) et (5), que la méthode marchera d'autant mieux que f' est grande et f'' petite, c'est-à-dire que i est grand et s petit).

(2) Justifiez que i et s sont bien définis et que $i > 0$.

(3) Écrivez la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n pour une fonction g de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[u, v]$ (c'est la dérivée $(n+1)$-ème de g qui intervient dans le reste intégral).

Pour la suite du problème on introduit la demi-longueur de J que l'on note r, et la quantité

$$c = c(J) \overset{\text{déf}}{=} \frac{sr}{2i}$$

On suppose avoir trouvé un intervalle $J = [a, b]$ vérifiant de plus $c < 1$. On choisit pour x_0 celle des deux extrémités de J qui est la plus proche de α.

(4) On suppose que $x_n \in J$. Justifiez qu'alors x_{n+1} est bien défini. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n = 1$ pour f avec $u = x_n$ et $v = \alpha$, montrez que $|f(x_n) - f'(x_n)(x_n - \alpha)| \leq \frac{s}{2}|x_n - \alpha|^2$. En utilisant le fait que $i \leq |f'(x_n)|$, déduisez-en que

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{c}{r}|x_n - \alpha|^2$$

(5) Déduisez-en par récurrence que pour tout $n \geq 0$ on a $|x_n - \alpha| \leq \frac{|x_0 - \alpha|}{c}\, c^{2^n}$ puis que $x_n \in J$.

(6) Établissez l'inégalité un peu moins fine :

$$|x_n - \alpha| \leq \left(\tfrac{r}{c}\right) c^{2^n} \qquad (\bigstar)$$

et concluez quant à la convergence de la suite (x_n).

(7) Donnez l'application au cas particulier de $f(x) = x^2 - 2$ et $x_0 = 1$. Pour cela choisissez $J = [1; 2]$; a-t-on $c < 1$? Améliore-t-on le résultat de l'exercice 3, question (3) ?

> PRATIQUE : Pour appliquer la méthode, on cherche un intervalle J assez petit, contenant α, et on vérifie que $c < 1$. On choisit ensuite pour x_0 l'extrémité de J la plus proche de α. On peut alors utiliser la majoration ($\bigstar$) pour les approximations de α par la suite de Newton de premier terme x_0.
> IMPORTANT : On retiendra que la méthode fonctionne d'autant mieux que $|f'(\alpha)|$ est grand.

Exercice 5 *Mise en application de la théorie.*

On souhaite donner des approximations des solutions de l'équation $-\ln(x) = x$. Montrez qu'il n'y a qu'une solution $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ puis mettez en pratique la méthode de Newton pour obtenir, à l'aide d'une calculatrice, une approximation de x_0 avec 10 décimales.

Exercice 6 *Remarques et compléments sur la méthode de Newton.*

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et α un zéro de f.

(1) Dans le cas où $f'(\alpha) = 0$ et $f''(\alpha) \neq 0$, supposant f de classe aussi grande que l'on veut, comment feriez-vous pour obtenir des approximations de α par la méthode de Newton ?

(2) Montrez que si f est un polynôme à coefficients rationnels, la méthode de Newton permet d'obtenir des approximations rationnelles $x_n \in \mathbb{Q}$.

(3) Dans l'exercice 4 (après la question (3)), on a supposé avoir trouvé un intervalle $J \subset I$ tel que $c(J) < 1$. Montrer qu'en effet, on peut toujours trouver un tel intervalle : pour cela regardez les intervalles $J_r := [\alpha - r, \alpha + r]$ et montrez que $c(J_r)$ tend vers 0 lorsque r tend vers 0.

La méthode de Newton : Corrigé

Exercice 1 (1) Tableau :

	f	g	h	i	j	k
dér. 1ère en $\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2} - \sqrt{3}$	$2\sqrt{2} - 2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
dér. 2ème en $\sqrt{2}$	2	2	2	0	2	0

(2) Le point $x = 1$ est un minimum pour h (on calcule $h'(1) = 0$) et donc la droite tangente à $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse 1 est horizontale. Elle ne coupe pas l'axe des abscisses et la suite de Newton n'est donc pas définie après ce point.

(3) La courbe de la fonction k étant une droite, la tangente au point $(x_0, k(x_0))$ se confond avec la courbe elle-même, donc le terme x_1 de la suite de Newton est égal au zéro de la fonction, i.e. $\sqrt{2}$. La suite de Newton est ensuite stationnaire, $x_n = \sqrt{2}$ pour $n \geq 1$.

(4) Il semble que la suite de Newton de la fonction f converge plus vite que la suite de Newton de la fonction g. On voit gaphiquement que lorsque la tangente au point $\alpha = \sqrt{2}$ a une pente grande, alors les tangentes aux points x_n (qui sont voisines) intersectent l'axe des abscisses très près de la racine α, de sorte que la suite de Newton tend rapidement vers α.

Comme les fonctions f et g ont même dérivée seconde en $\sqrt{2}$, on peut tenter d'expliquer cela par la différence entre les dérivées $f'(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \approx 2,83$ et $g'(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - \sqrt{3} \approx 1,10$. En fait ce sont les valeurs absolues qui comptent : si les fonctions étaient décroissantes ce serait la même chose. Ainsi pour que la suite de Newton d'une fonction f converge vite, il faut que la valeur $|f'(\alpha)|$ soit grande.

(5) La suite de Newton de la fonction k semble converger plus vite que celle de la fonction i, puis enfin vient j. Il semble que la suite de Newton converge plus rapidement quand la dérivée seconde est petite, en effet on voit que lorsque la dérivée seconde augmente, la convexité de la fonction augmente (et donc sa courbe représentative est plus incurvée). Ceci tend à éloigner de la racine α le point d'intersection de la tangente au point x_n avec l'axe des abscisses.

Comme les trois fonctions ont même dérivée première en $\sqrt{2}$, on peut expliquer cela par la taille de la dérivée seconde : $k''(\sqrt{2}) = 0$ et c'est un cas extrême car en fait k'' est même la fonction nulle ; puis $i''(\sqrt{2}) = 0$ et $j''(\sqrt{2}) = 2$. Ici aussi, si la convexité des fonctions était dans l'autre sens ce serait similaire, et ce sont les valeurs absolues qui comptent : pour que la suite de Newton d'une fonction f converge vite, il faut que la valeur $|f''(\alpha)|$ soit petite.

(6) Pour utiliser les fonctions g, h, i, j, k, et en particulier pour faire des calculs de leurs valeurs, il faut connaître $\sqrt{2}$! Donc ces fonctions ne sont certainement pas adaptées si on veut calculer des approximations de $\sqrt{2}$...

Exercice 2 (1) La droite $\mathscr{D}_n$ a pour coefficient directeur $f'(x_n)$ et passe par le point $(x_n, f(x_n))$ ce qui permet de déterminer son équation : $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$.

(2) Comme par hypothèse $f'(x_n) \neq 0$ (car f' ne s'annule pas), alors la tangente $\mathscr{D}_n$ n'est pas parallèle à l'axe des abscisses et donc elle le coupe. Le point intersection a pour cordonnées $x = x_{n+1}$ et $y = 0$, donc en remplaçant, $0 = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n)$. On trouve $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Exercice 3 (1) L'expression de l'exercice précédent, question (2) donne $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2-2}{2x_n} = \frac{x_n^2+2}{2x_n}$. C'est-à-dire, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ avec $\varphi(x) = \frac{x^2+2}{2x}$. On justifie par récurrence que $x_n \neq 0$: il est clair que $x_0 \neq 0$, et si $x_n \neq 0$ alors $x_{n+1} = \frac{x_n^2+2}{2x_n} \neq 0$. Ceci conclut.

(2) Montrons que $x_n \geq 1$. C'est vrai pour $n = 0$ car $x_0 = 1$. De plus, si $x_n \geq 1$ on a $x_n^2 + 2 \geq 2x_n$ (car $x_n^2 + 2 - 2x_n = (x_n - 1)^2 + 1 \geq 0$). Donc $x_{n+1} = \frac{x_n^2+2}{2x} \geq 1$, ceci démontre la propriété qu'on voulait.

Calculons $x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{x_n^2+2}{2x_n} - \sqrt{2} = \frac{x_n^2+2-2\sqrt{2}x_n}{2x_n} = \frac{(x_n-\sqrt{2})^2}{2x_n}$. De $x_n \geq 1$ on tire $1/x_n \leq 1$, et donc

$$|x_{n+1} - \sqrt{2}| = \left|\frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n}\right| \leq \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}|^2$$

(3) On montre que $|x_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^{2^n}}$ par récurrence. Pour $n = 0$, $|x_0 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1 \leq 1/2$. Supposons vérifiée l'inégalité au rang n, alors d'après (2) et l'hypothèse de récurrence on a $|x_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}|^2 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2^n}}\right)^2 \leq \frac{1}{2^{2^{n+1}}}$. C'est bien l'inégalité demandée au rang $n+1$. Cette inégalité montre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (très vite) vers $\sqrt{2}$.

(4) On a vu que $|x_5 - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^{2^5}} = \frac{1}{2^{32}}$. Si $\frac{1}{2^{32}} \leq 10^{-n}$ on aura donc au moins n décimales exactes de $\sqrt{2}$ dans x_5. Or cela est équivalent à $10^n \leq 2^{32}$ donc, en prenant les logarithmes, $n\ln(10) \leq 32\ln(2)$. On obtient $n \leq 32\frac{\ln(2)}{\ln(10)} \approx 9,63$. On a donc au moins 9 décimales exactes.

Pour x_{10} on trouve $n \leq 2^{10}\frac{\ln(2)}{\ln(10)} \approx 308,25$. On a donc au moins 308 décimales exactes.

Exercice 4 (1) Comme $f'(\alpha) \neq 0$ et que f' est continue, alors elle est de signe constant sur un voisinage $]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[$ de α (voir exercice k.1 fait en TD). On peut choisir pour J n'importe quel intervalle $J = [a, b]$ inclus dans ce voisinage et contenant α.

(2) Les fonctions f' et f'' étant continues sur l'intervalle fermé borné $J = [a, b]$, par un théorème du cours elles sont bornées et atteignent leurs bornes. Donc i et s sont bien définis. De plus f' atteint sa borne inférieure en un point $c \in [a, b]$, et comme f' ne s'annule pas sur J, on a $i = |f'(c)| > 0$.

(3) La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n pour $g \in \mathscr{C}^{n+1}([u,v],\mathbb{R})$ s'écrit

$$g(v) = g(u) + g'(u)(v-u) + \frac{g''(u)}{2!}(v-u)^2 + \cdots + \frac{g^{(n)}(u)}{n!}(v-u)^n + \int_u^v \frac{(v-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)\,dt$$

(4) Si $x_n \in J$, alors d'après le choix de J à la question (1), $f'(x_n) \neq 0$ et donc x_{n+1} est bien défini par l'expression $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
Appliquons maintenant la formule de Taylor à l'ordre 1 à f avec $u = x_n$ et $v = \alpha$:

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \int_{x_n}^{\alpha} (\alpha - t) f''(t)\,dt$$

On en déduit que $f(x_n) - f'(x_n)(x_n - \alpha) = -\int_{x_n}^{\alpha} (\alpha - t) f''(t)\,dt$ donc

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f'(x_n)(x_n - \alpha)| &= \left| \int_{x_n}^{\alpha} (\alpha - t) f''(t)\,dt \right| \leq \int_{x_n}^{\alpha} |(\alpha - t) f''(t)|\,dt \\ &\leq \int_{x_n}^{\alpha} |\alpha - t| \times s\,dt = \tfrac{s}{2}|x_n - \alpha|^2 \end{aligned}$$

C'est l'inégalité demandée. On calcule ensuite

$$x_{n+1} - \alpha = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \alpha = \frac{f'(x_n)(x_n - \alpha) - f(x_n)}{f'(x_n)}$$

En tenant compte du fait que $|f'(x_n)| \geq i$ donc $1/|f'(x_n)| \leq 1/i$, on en déduit :

$$|x_{n+1} - \alpha| = \frac{|f(x_n) - f'(x_n)(x_n - \alpha)|}{|f'(x_n)|} \leq \frac{1}{i}|f(x_n) - f'(x_n)(x_n - \alpha)| \leq \frac{s}{2i}|x_n - \alpha|^2 = \frac{c}{r}|x_n - \alpha|^2$$

(5) Soit $P(n)$ la propriété $|x_n - \alpha| \leq \frac{|x_0 - \alpha|}{c} c^{2^n}$. Ainsi $P(0)$ est une évidence : $|x_0 - \alpha| \leq |x_0 - \alpha|$. Pour montrer que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, on part de la deuxième inégalité de la question (4) :

$$|x_{n+1} - \alpha| \overset{\overset{(4)}{\downarrow}}{\leq} \frac{c}{r}|x_n - \alpha|^2 \overset{\overset{P(n)}{\downarrow}}{\leq} \frac{c}{r}\left(\frac{|x_0 - \alpha|}{c} c^{2^n}\right)^2 = \frac{|x_0 - \alpha|}{r} \frac{|x_0 - \alpha|}{c} c^{2^{n+1}} \leq \frac{|x_0 - \alpha|}{c} c^{2^{n+1}}$$

La dernière inégalité provient de $|x_0 - \alpha| \leq r$, en effet r est la demi-longueur de l'intervalle J et on a choisi pour x_0 l'extrémité de J la plus proche de α. Voilà démontrée la propriété P.

Montrons maintenant que $x_n \in J$. Comme $c < 1$ on a $c^{2^n} < c$, donc,

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{|x_0 - \alpha|}{c} c^{2^n} \leq |x_0 - \alpha|$$

Comme x_0 est l'extrémité de J la plus proche de α, ceci prouve bien que $x_n \in J$ (faites un dessin !).

(6) Pour montrer ($\bigstar$) il n'y a qu'à dire une fois encore que $|x_0 - \alpha| \leq r$:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{|x_0 - \alpha|}{c} c^{2^n} \leq \frac{r}{c} c^{2^n}$$

Il en découle que la suite (x_n) converge vers α, d'autant plus vite que c est petit.

(7) Soit $f(x) = x^2 - 2$ et $x_0 = 1$. On a $f'(x) = 2x$ et $f''(x) = 2$. Si on essaie l'intervalle $J = [1, 2]$ on doit calculer $i = 2$ (l'inf de $|f'|$) et $s = 2$ (le sup de $|f''|$). On a aussi $r = 1/2$ donc $c = \frac{sr}{2i} = 1/4$. On a bien $c < 1$ donc J convient. On obtient comme inégalité ($\bigstar$) :

$$|x_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2^n}$$

On voit qu'on améliore le résultat de la question (3) de l'exercice 3, dans lequel l'énoncé n'avait pas été assez soigneux pour obtenir la meilleure inégalité possible.

Exercice 5 La fonction qui à x associe $f(x) = \ln(x) + x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, sa limite en 0 est $-\infty$ et sa limite en $+\infty$ est $+\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$. De plus f est strictement croissante car c'est une somme de deux fonctions strictement croissantes. Donc elle est injective, il s'ensuit qu'il y a une et une seule solution $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ à l'équation $f(x) = 0$.

Appliquons la méthode de Newton : la relation de récurrence qui définit la suite $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ est $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Le calcul donne $\varphi(x) = \frac{x(1-\ln(x))}{1+x}$.

Il faut choisir un intervalle J contenant la racine x_0 cherchée, assez petit pour vérifier $c < 1$. Calculons $f(1) = 1$ et $f(1/2) = -\ln(2) + \frac{1}{2} < 0$ (car $\ln(2) \approx 0,693$). Il en découle que $x_0 \in [1/2; 1]$. On pose $J = [1/2; 1]$.

Regardons si on a bien $c < 1$. Il faut calculer $f'(x) = \frac{1}{x} + 1$ et $f''(x) = \frac{-1}{x^2}$. On trouve immédiatement $i = 2$ (borne inf de $|f'|$) et $s = 4$ (borne sup de $|f''|$). Comme la demi-longueur vaut $r = 1/4$ on trouve $c = \frac{sr}{2i} = 1/4$. C'est gagné, on a bien $c < 1$! Il est même assez petit donc la convergence sera rapide.

Enfin on doit trouver quelle est l'extrémité de J qui est la plus proche de la racine x_0 pour choisir cette extrémité comme premier terme de la suite de Newton. Pour cela on étudie le signe de $f(3/4)$, or on voit qu'on peut utiliser encore $\ln(2)$ puisque

$$f(3/4) = \ln(3/4) + 3/4 \ > \ \ln(1/2) + 3/4 = -\ln(2) + 3/4 \approx -0,693 + 0,75 \ > 0$$

En conséquence, $x_0 \in [1/2; 3/4]$ et donc l'extrémité de J la plus proche de x_0 est $1/2$. On choisit donc pour premier terme de la suite de Newton, $\widetilde{x}_0 = 1/2$ (attention : la notation x_0 est déjà prise par la racine que l'on cherche).

L'étude théorique nous dit qu'on a alors la majoration ($\bigstar$), avec $\frac{c}{r} = \frac{1/4}{1/4} = 1$ donc

$$|x_n - x_0| \leq (\frac{c}{r})^{-1} c^{2^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2^n}$$

Pour avoir 10 décimales justes il faut assurer $(1/4)^{2^n} \leq 10^{-10}$ c'est-à-dire $10^{10} \leq 4^{2^n}$. En prenant les logarithmes on a $10\ln(10) \leq 2^n \ln(4)$ et en recommençant,

$$\ln\left(\frac{10\ln(10)}{\ln(4)}\right) \leq n\ln(2)$$

Il faut donc $n \geq \frac{1}{\ln(2)} \ln\left(\frac{10\ln(10)}{\ln(4)}\right)$. La calculatrice nous apprend que cette valeur vaut $\approx 4,05$ et donc on aura 10 décimales exactes avec x_5. En calculant avec $x_{n+1} = \frac{x_n(1-\ln(x_n))}{1+x_n}$ on obtient

$\widetilde{x}_0 = 1/2$	$x_2 \approx 0,567138987716$	$x_4 \approx 0,567143290410$
$x_1 \approx 0,56438239352$	$x_3 \approx 0,567143290399$	$x_5 \approx 0,567143290410$

Voilà les 10 premières décimales de la racine x_0.

Exercice 6 (1) Si $f'(\alpha) = 0$ et $f''(\alpha) \neq 0$, pour obtenir des approximations de α, il suffit d'appliquer la méthode de Newton à f'...

(2) Si f est un polynôme à coefficients rationnels, il est clair que la fonction $\varphi(x) = \frac{x^2+2}{2x}$ est une fraction rationnelle à coefficients rationnels (i.e. un quotient de deux polynômes), et donc si on choisit un premier terme x_0 rationnel il est clair que tous les termes de la suite de Newton seront dans $\mathbb{Q}$.

(3) On regarde les intervalles $J_r := [\alpha - r, \alpha + r]$ lorsque r décroît. Notons

$$i(r) := \inf_{x \in J_r} |f'| \qquad \text{et} \qquad s(r) := \sup_{x \in J_r} |f''|$$

ainsi que $c(r) = \frac{s(r) \times r}{2 \times i(r)}$ la constante associée. Si $r \leq r_0$, on a $J_r \subset J_{r_0}$ et donc $i(r) \geq i(r_0)$ et $s(r) \leq s(r_0)$. Il en découle que

$$c(r) = \frac{s(r) \times r}{2 \times i(r)} \leq \frac{s(r_0)}{2 \times i(r_0)} \times r$$

Donc si on fixe r_0 et que $r \to 0$, on a $c(r) \to 0$. Donc pour un r suffisamment petit, on aura $c(r) < 1$.