Un résultat de densité pour les équations de Maxwell régularisées dans un domaine lipschitzien

Martin COSTABEL et Monique DAUGE

IRMAR (UMR CNRS 6625), Université de RENNES 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, FRANCE

Résumé. Nous montrons la densité des fonctions régulières dans l'espace des champs de vecteurs L^2 à divergence et rotationnel L^2, et dont la trace tangentielle (ou normale) est L^2 sur le bord. Notre démonstration est basée sur des théorèmes de régularité dans les domaines lipschitziens et constitue une simplification et une généralisation du résultat de [3].

A density result for the regularized Maxwell equations in a Lipschitz domain

Abstract. *We show the density of smooth functions in the space of square integrable vector fields whose curl, divergence, and tangential (or normal) trace on the boundary are square integrable. Our proof is based on the $H^{3/2}$ regularity for the Dirichlet and Neumann problems and constitutes a simplification and generalization of* [3].

Abridged English Version

Let Ω be a bounded Lipschitz domain in $\mathbb{R}^d$, $d=2$ or 3. Let W be the Hilbert space of vector fields that are square integrable on Ω together with their curl and divergence and whose tangential component is square integrable on $\partial\Omega$. This space with its natural norm

$$\|u\|_W^2 = \int_\Omega \big(|u|^2 + |\operatorname{curl} u|^2 + |\operatorname{div} u|^2\big)\,dx + \int_{\partial\Omega} |u\times n|^2\,d\sigma$$

appears as energy space in certain variational formulations of electromagnetic boundary value problems, for example for the time-harmonic Maxwell equations "regularized" (see [11]) by the addition of a $\mathbf{grad}\operatorname{div}$ term. The boundary L^2 norm can correspond to weak formulations of impedance boundary conditions or a penalization of perfect conductor boundary conditions.

The density of $H^1(\Omega)$ vector fields in W is then necessary for the convergence of conforming finite element methods. That this is a nontrivial question is shown by the example of the subspace X_N of W consisting of vector fields with vanishing tangential trace on $\partial\Omega$. On nonconvex polyhedra, $X_N \cap H^1(\Omega)$ is not dense in X_N [5], and this causes some finite element methods to give incorrect results [6].

We give a proof of the following result.

THEOREM.– *$\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})^d$ is dense in W.*

The corresponding result holds where the tangential component on the boundary is replaced by the normal component.

For polyhedra, this result was obtained recently [3]. We give a different proof which works for general Lipschitz domains. Our proof uses the $H^{3/2}(\Omega)$ regularity of harmonic functions with Dirichlet data in $H^1(\partial\Omega)$ or Neumann data in $L^2(\partial\Omega)$. On Lipschitz domains, this is a deep result by JERISON & KENIG [13]. For piecewise smooth domains, it is a standard consequence of the regularity theory based on Mellin techniques [8].

Thus, the first stage of the proof relies on the following decomposition of the space W:

LEMMA.– $W = H^1(\Omega)^d + \{\mathbf{grad}\,\varphi \mid \varphi \in H^{3/2}(\Omega);\ \Delta\varphi \in L^2(\Omega)\}$.

The proof of the theorem is completed by generalizing a proof of GRISVARD [10] of the density of $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ functions in the space of $H^1(\Omega)$ functions with square integrable Laplacian.

LEMMA.– *Let* $H^s(\Delta;\Omega) = \{\varphi \in H^s(\Omega) \mid \Delta\varphi \in L^2(\Omega)\}$ *with its natural norm.*
Then for any $s < 2$, $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ *is dense in* $H^s(\Delta;\Omega)$.

Since this lemma holds not only for $s = 3/2$, we obtain a generalization of the theorem, valid for polyhedra, where the L^2 norm on the boundary is replaced by other Sobolev norms.

---

1. Le résultat principal

Sauf mention du contraire *dans toute cette Note,* Ω *désigne un domaine lipschitzien borné* dans $\mathbb{R}^d$ avec $d = 2$ ou 3. L'espace $H(\mathrm{rot};\Omega)$ est défini de manière classique comme l'espace des champs $\boldsymbol{u}$ dans $L^2(\Omega)^d$ tels que $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)^3$ si $d = 3$ et $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)$ si $d = 2$. Plus simplement, $H(\mathrm{div};\Omega)$ est l'espace des champs $\boldsymbol{u}$ dans $L^2(\Omega)^d$ tels que $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)$. Enfin, l'espace $H(\mathrm{rot},\mathrm{div};\Omega)$ est l'intersection $H(\mathrm{rot};\Omega) \cap H(\mathrm{div};\Omega)$.

Ici, nous nous intéressons aux sous-espaces de $H(\mathrm{rot},\mathrm{div};\Omega)$ à traces normales ou tangentielles dans $L^2(\partial\Omega)$. Avec $\boldsymbol{n}$ la normale extérieure à $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} V &= \{\boldsymbol{u} \in H(\mathrm{rot},\mathrm{div};\Omega) \mid \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} \in L^2(\partial\Omega)\}, \\ W &= \{\boldsymbol{u} \in H(\mathrm{rot},\mathrm{div};\Omega) \mid \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n} \in L^2(\partial\Omega)^d\}. \end{aligned}$$

Rappelons que si l'espace $H(\mathrm{rot};\Omega)$ peut convenir à la formulation variationnelle des équations de Maxwell, on peut lui préférer l'emploi de $H(\mathrm{rot},\mathrm{div};\Omega)$, ce qui correspond à "régulariser" la forme bilinéaire $\langle \mathbf{rot}\,\cdot, \mathbf{rot}\,\cdot\rangle$ par $\langle \mathrm{div}\,\cdot, \mathrm{div}\,\cdot\rangle$, voir [11]. La condition sur la trace tangentielle présente dans l'espace W peut convenir, soit à une formulation faible de conditions aux limites d'impédance, soit à la pénalisation des conditions aux limites du conducteur parfait. On est amené à envisager une telle pénalisation parce que le sous-espace X_N de W à traces tangentielles nulles n'admet pas de sous-espace dense de fonctions $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ en général, voir §5. D'où l'importance du:

THÉORÈME 1. – *Les espaces* V *et* W *coïncident et* $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ *est dense dans* V *et dans* W.

La structure de la preuve est similaire à celle de [3] et repose sur trois lemmes.

2. Le passage aux gradients

Les éléments de V ou W qui sont des gradients $\mathbf{grad}\,\varphi$ sont tels que $\Delta\varphi \in L^2(\Omega)$ avec de la régularité sur la trace de Neumann ou la trace de Dirichlet. C'est pourquoi nous introduisons pour $s > \frac{1}{2}$:

$$\hat{V}^s = \left\{\varphi \in H^1(\Omega) \mid \Delta\varphi \in L^2(\Omega);\ \partial_n\varphi\big|_{\partial\Omega} \in H^{s-1}(\partial\Omega)\right\},$$

$$\hat{W}^s = \left\{\varphi \in H^1(\Omega) \mid \Delta\varphi \in L^2(\Omega);\ \varphi\big|_{\partial\Omega} \in H^{s}(\partial\Omega)\right\}.$$

LEMME 1. – [4]. *Soit Ω simplement connexe. On a*

$$V = H^1(\Omega)^d + \left\{\mathbf{grad}\,\varphi \mid \varphi \in \hat{V}^1\right\}, \quad W = H^1(\Omega)^d + \left\{\mathbf{grad}\,\varphi \mid \varphi \in \hat{W}^1\right\}$$

et comme les espaces $\hat{V}^1$ et $\hat{W}^1$ coïncident, on a l'égalité $V = W$.

Ce lemme repose sur la construction classique de $\boldsymbol{u}_0 \in H^1(\Omega)^d$ tel que $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}_0 = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}$, voir [9, 1]. Ainsi, $\boldsymbol{u} \in V$, resp. $\boldsymbol{u} \in W$, si et seulement si $\varphi \in \hat{V}^1$, resp. $\varphi \in \hat{W}^1$.

L'équivalence, pour $\varphi \in H^1(\Omega)$ tel que $\Delta\varphi \in L^2(\Omega)$, des conditions

$$\text{“}\partial_n\varphi\big|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)\text{”} \quad \text{et} \quad \text{“}\varphi\big|_{\partial\Omega} \in H^1(\partial\Omega)\text{”}$$

découle des inégalités de Rellich et a été observée par NEČAS [15] et JERISON & KENIG [13].

3. La régularité des potentiels

Par le lemme 1, nous sommes ramenés à l'étude des “potentiels” φ. Introduisons, pour $s < 2$ le nouvel espace

$$H^s(\Delta;\Omega) = \left\{\varphi \in H^s(\Omega) \mid \quad \Delta\varphi \in L^2(\Omega)\right\}.$$

LEMME 2. – [14, cor. 5.7]. *Les espaces $\hat{V}^1$ et $\hat{W}^1$ coïncident avec $H^{\frac{3}{2}}(\Delta;\Omega)$.*

L'inclusion $\hat{W}^1 \subset H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ est un cas limite de la régularité elliptique pour le problème de Dirichlet sur un domaine lipschitzien. Elle se trouve dans [12], avec une démonstration détaillée dans [14].

L'inclusion inverse $H^{\frac{3}{2}}(\Delta;\Omega) \subset \hat{W}^1$ n'est pas triviale non plus car le théorème de traces standard “ $\varphi \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ *implique* $\varphi\big|_{\partial\Omega} \in H^1(\partial\Omega)$ ” est faux pour Ω lipschitzien en général, voir [14, prop. 3.2]. C'est la condition supplémentaire sur le laplacien $\Delta\varphi \in L^2(\Omega)$ qui en assure la validité.

Notons par ailleurs que, pour tout s, $\frac{1}{2} < s < 1$, les égalités

$$\hat{V}^s = \hat{W}^s = H^{s+\frac{1}{2}}(\Delta;\Omega)$$

sont encore vraies et peuvent se démontrer par des techniques plus élémentaires, voir [5]. Par contre ce résultat n'aurait pas de sens pour $s > 1$ car les espaces $H^s(\partial\Omega)$ n'admettent alors pas de définition naturelle pour Ω lipschitzien.

4. La densité dans les espaces de potentiels

LEMME 3. – *Pour tout* $s < 2$ *, les fonctions* $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ *sont denses dans* $H^s(\Delta;\Omega)$.

Démonstration. Elle suit celle de GRISVARD [10, Lemma 1.5.3.9] établie pour le cas $s = 1$.

Soit ℓ dans le dual de $H^s(\Delta;\Omega)$ satisfaisant $\ell(\varphi) = 0$ pour tout $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$. Nous allons démontrer que $\ell(\varphi) = 0$ pour tout $\varphi \in H^s(\Delta;\Omega)$.

L'application $\varphi \mapsto (\varphi, \Delta\varphi)$ étant une isométrie de $H^s(\Delta;\Omega)$ sur un sous-espace de $H^s(\Omega) \times L^2(\Omega)$, la fonctionnelle ℓ admet la représentation pour tout $\varphi \in H^s(\Delta;\Omega)$

$$\ell(\varphi) = f(\varphi) + \int_\Omega g\,\Delta\varphi, \quad \text{avec} \quad f \in H^s(\Omega)' \ \text{ et } \ g \in L^2(\Omega). \tag{1}$$

Rappelons que, *comme* Ω *est lipschitzien*, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $H^t(\Omega)$ est l'espace des restrictions des éléments de $H^t(\mathbb{R}^d)$ à Ω , et son dual $H^t(\Omega)'$ s'identifie au sous-espace $\widetilde{H}^{-t}(\Omega)$ des distributions de $H^{-t}(\mathbb{R}^d)$ à support dans $\overline{\Omega}$.

Ainsi, le prolongement $P_0 f$ de f par zéro dans $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$ est dans $H^{-s}(\mathbb{R}^d)$ et on a

$$f(\varphi) = \langle P_0 f, P\varphi\rangle \quad \text{pour tout } \varphi \in H^s(\Omega) \text{ et tout prolongement } P\varphi \in H^s(\mathbb{R}^d) \text{ de } \varphi .$$

La relation (1) s'écrit donc

$$\ell(\varphi) = \langle P_0 f, P\varphi\rangle + \int_\Omega g\,\Delta\varphi, \quad \text{avec} \quad P_0 f \in \widetilde{H}^{-s}(\Omega).$$

Le fait que $\ell(\varphi) = 0$ pour tout $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ donne alors

$$\langle P_0 f, \psi\rangle = -\langle P_0 g, \Delta\psi\rangle \quad \text{pour tout } \psi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d) ,$$

donc que $-\Delta P_0 g = P_0 f$ au sens des distributions sur $\mathbb{R}^d$. Ceci entraîne que $P_0 g$ est dans $H^{2-s}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, donc dans $\widetilde{H}^{2-s}(\Omega)$.

Rappelons que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $H^t(\Omega)$ est est un espace de distributions sur Ω , et qu'ainsi, $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ est dense dans son dual.

Soit donc $(g_m)_{m\geq 0}$ une suite dans $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ convergeant vers $P_0 g$ dans $H^{2-s}(\mathbb{R}^d)$. Par conséquent $-\Delta g_m \to P_0 f$ dans $H^{-s}(\mathbb{R}^d)$ et, comme $s < 2$, $g_m \to g$ dans $L^2(\Omega)$. Ainsi pouvons-nous conclure que pour tout $\varphi \in H^s(\Delta;\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} \ell(\varphi) &= \lim_{m\to\infty} \big(\langle -\Delta g_m, P\varphi\rangle + \int_\Omega g_m \Delta\varphi\big) \\ &= \lim_{m\to\infty} \big(\langle -\Delta g_m, P\varphi\rangle + \langle g_m, \Delta P\varphi\rangle\big) \ = \ 0. \end{aligned}$$

■

5. Etape finale et commentaires

La démonstration du théorème s'effectue alors comme dans [3]. Par troncature, on peut se ramener au cas d'un domaine simplement connexe. Grâce au lemme 1, tout $\boldsymbol{u}$ dans W se décompose en $\boldsymbol{u}_0 + \mathbf{grad}\,\varphi$ avec φ dans $\hat{W}^1$. D'après le lemme 2, φ appartient à $H^{\frac{3}{2}}(\Delta;\Omega)$, dans lequel $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ est dense d'après le lemme 3. Il existe donc des suites $(\boldsymbol{v}_m)_{m\geq 0}$ dans $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})^d$ et $(\varphi_m)_{m\geq 0}$ dans $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ telles que $\boldsymbol{v}_m \to \boldsymbol{u}_0$ dans $H^1(\Omega)^d$, donc dans W , et $\varphi_m \to \varphi$ dans $\hat{W}^1$, donc $\mathbf{grad}\,\varphi_m \to \mathbf{grad}\,\varphi$ dans W . Donc $\boldsymbol{v}_m + \mathbf{grad}\,\varphi_m \to \boldsymbol{u}$ dans W . ■

Il est intéressant de comparer le résultat du théorème 1 avec les résultats de *densité* et de *non-densité* connus par ailleurs.

A) MAXWELL NON-RÉGULARISÉ. Si l'on considère les espaces basés uniquement sur le rotationnel, on a toujours densité:

(i) $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})^d$ est dense dans l'espace $H(\mathrm{rot};\Omega)$, [9],

(ii) $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)^d$ est dense dans le sous-espace des $\boldsymbol{u} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ à trace tangentielle $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n}$ nulle sur $\partial\Omega$, [9],

(iii) $\mathscr{C}^\infty(\Omega)^d$ est dense dans le sous-espace des $\boldsymbol{u} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ à trace tangentielle $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n}$ dans $L^2(\partial\Omega)$, [2].

B) MAXWELL RÉGULARISÉ PAR LA DIVERGENCE. Alors que $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})^d$ est dense dans l'espace $H(\mathrm{rot},\mathrm{div};\Omega)$, [9], la situation est plus délicate en ce qui concerne les espaces

$$\begin{aligned} X_T &= \big\{\boldsymbol{u} \in H(\mathrm{rot},\mathrm{div};\Omega) \mid \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\big|_{\partial\Omega} = 0\big\}, \\ X_N &= \big\{\boldsymbol{u} \in H(\mathrm{rot},\mathrm{div};\Omega) \mid \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n}\big|_{\partial\Omega} = 0\big\}. \end{aligned}$$

Pour un polyèdre Ω (ou un polygone si $d=2$), on a

(i) $X_N \cap H^1(\Omega)^d$ est dense dans l'espace X_N si et seulement si Ω est *convexe*, [5],

(ii) $X_N \cap \mathscr{C}^\infty(\Omega)^d$ est dense dans $X_N \cap H^1(\Omega)^d$, [7],

(iii) Donc si Ω est un polyèdre non convexe, $X_N \cap \mathscr{C}^\infty(\Omega)^d$ n'est pas dense dans X_N,

et les résultats correspondants pour X_T.

6. Extension du résultat principal

Pour $s > \frac{1}{2}$, on introduit la gamme d'espaces

$$\begin{aligned} V^s &= \big\{\boldsymbol{u} \in H(\mathrm{rot},\mathrm{div};\Omega) \mid \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} \in H^{s-1}(\partial\Omega)\big\}, \\ W^s &= \big\{\boldsymbol{u} \in H(\mathrm{rot},\mathrm{div};\Omega) \mid \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n} \in H^{s-1}(\partial\Omega)^d\big\}, \end{aligned}$$

contenant V comme V^1 et W comme W^1. Si Ω est lipschitzien, pour tout s, $\frac{1}{2} < s \leq 1$, les espaces V^s et W^s coïncident et $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})^d$ y est dense. Comme on l'a déjà signalé, la barrière $s=1$ est infranchissable pour un domaine lipschitzien quelconque.

Par contre, si Ω est un *polyèdre lipschitzien*, alors on peut monter jusqu'à la limite de régularité des problèmes de Dirichlet et de Neumann: il existe $s_\Omega \leq \frac{3}{2}$ maximal tel que pour tout s, $\frac{1}{2} < s < s_\Omega$

$$\hat{V}^s = \hat{W}^s = H^{s+\frac{1}{2}}(\Delta;\Omega).$$

La valeur de s_Ω dépend de l'ouverture des arêtes de Ω et des exposants de singularités Dirichlet et Neumann aux coins de Ω, [8]. Pour tout polyèdre lipschitzien, s_Ω est strictement plus grand que 1. On a:

THÉORÈME 2. – *Si* Ω *est un* polyèdre lipschitzien*, avec* s_Ω *ci-dessus défini, pour tout* s*,* $\frac{1}{2} < s < s_\Omega$*, les espaces* V^s *et* W^s *coïncident, et* $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})^d$ *est dense dans* $V^s = W^s$.

Références bibliographiques

[1] C. AMROUCHE, C. BERNARDI, M. DAUGE, V. GIRAULT. Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains. *Math. Meth. Appl. Sci.* **21** (1998) 823–864.

[2] F. BEN BELGACEM, C. BERNARDI, M. COSTABEL, M. DAUGE. Un résultat de densité pour les équations de Maxwell. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **324**(6) (1997) 731–736.

[3] P. CIARLET, C. HAZARD, S. LOHRENGEL. Les équations de Maxwell dans un polyèdre : un résultat de densité. *C. R. Acad. Sc. Paris, Série I* (1998). A paraître.

[4] M. COSTABEL. A remark on the regularity of solutions of Maxwell's equations on Lipschitz domains. *Math. Methods Appl. Sci.* **12 (4)** (1990) 365–368.

[5] M. COSTABEL. A coercive bilinear form for Maxwell's equations. *J. Math. Anal. Appl.* **157 (2)** (1991) 527–541.

[6] M. COSTABEL, M. DAUGE. Maxwell and Lamé eigenvalues on polyhedra. Preprint 98-08, Université de Rennes 1 (1998). To appear in *Math. Meth. Appl. Sci.* `http://www.maths.univ-rennes1.fr/~dauge/` .

[7] M. COSTABEL, M. DAUGE, S. NICAISE. Singularities of Maxwell interface problems. Preprint 98-24, Université de Rennes 1 (1998). `http://www.maths.univ-rennes1.fr/~dauge/` .

[8] M. DAUGE. *Elliptic Boundary Value Problems in Corner Domains – Smoothness and Asymptotics of Solutions*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1341. Springer-Verlag, Berlin 1988.

[9] V. GIRAULT, P. RAVIART. *Finite Element Methods for the Navier–Stokes Equations, Theory and Algorithms*. Springer series in Computational Mathematics, 5. Springer-Verlag, Berlin 1986.

[10] P. GRISVARD. *Boundary Value Problems in Non-Smooth Domains*. Pitman, London 1985.

[11] C. HAZARD, M. LENOIR. On the solution of time-harmonic scattering problems for Maxwell's equations. *SIAM J. Math. Anal.* **27 (6)** (1996) 1597–1630.

[12] D. JERISON, C. E. KENIG. The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains. *J. Funct. Anal.* **130**(1) (1995) 161–219.

[13] D. S. JERISON, C. E. KENIG. The Neumann problem on Lipschitz domains. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **4**(2) (1981) 203–207.

[14] D. S. JERISON, C. E. KENIG. Boundary value problems on Lipschitz domains. In *Studies in partial differential equations*, volume 23 of *MAA Stud. Math.*, pages 1–68. Math. Assoc. America, Washington, D.C. 1982.

[15] J. NEČAS. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson et Cie, Éditeurs, Paris 1967.