BAKER

PRSB CONTROLE CONTINU

15 février, 2017

Durée 1h30

NOM, PRENOM :

INSTRUCTIONS:

1) Calculatrice autorisée, documents et téléphones portables interdits.

2) Le contrôle comporte 4 exercices. Pour chacun de ces exercices, vous rédigerez votre solution directement à la suite de l'énoncé en utilisant éventuellement le verso de la page mais sans utiliser de feuille supplémentaire.

3) La qualité de rédaction sera prise en compte. En particulier, les passages illisibles seront réputés non écrits.

Exercice 1 On considère les mains de 5 cartes que l'on peut extraire d'un jeu de **24** cartes (9,10,V,D,R,A de pique, coeur, trèfle, carreau).

1. Combien y-a-t-il de mains différentes?
2. Quelle est la probabilité d'avoir une main avec **exactement** 1 as?
3. Quelle est la probabilité d'avoir une main avec **au moins** 1 as?

1. Nombre de mains $= C_{24}^{5} = \frac{24!}{19! \times 5!} = \underline{42504}$

2. Nombre de mains avec exactement 1 as

$= 4 \times C_{20}^{4} = \underline{19380}$

Probabilité d'avoir une main avec exactement 1 as

$= \frac{19380}{42504} = \underline{0,4559\ldots}$ $(\sim 45,6\ \%)$

3. Nombre de mains sans as $= C_{20}^{5} = \frac{20!}{15! \times 5!} = \underline{15504}$

Donc nombre de mains avec au moins un as

$= 42504 - 15504 = \underline{27000}$

Probabilité d'avoir une main avec au moins un as

$= \frac{27000}{42504} = \underline{0,635\ldots}$ $(\sim 63,5\ \%)$

Exercice 2 On a trois pièces: deux sont équilibrées ($\mathbf{P}(pile) = 1/2 = \mathbf{P}(face)$) et la troisième est truquée ($\mathbf{P}(pile) = 2/3$, $\mathbf{P}(face) = 1/3$).

1. On choisit une des trois pieces au hasard et on la lance. Quelle est la probabilité qu'elle tombe "pile"?
2. On choisit une des trois pieces au hasard et on la lance... elle tombe "pile". Quelle est la probabilité que la piece soit truquée?

A : " pièce tombe pile "

T : " pièce est truquée "

1. $$P(A) = P(A|T)\,P(T) + P(A|T^c)\,P(T^c)$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$$

2. $$P(T|A) = \frac{P(A|T)\,P(T)}{P(A)}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{2}{5}$$

Exercice 3 On jette un dé équilibré : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathbf{P}(i) = 1/6 \quad \forall i = 1, ..., 6$.

1. Est-ce que les événements $A = \{1,2\}$ et $B = \{2,3,4\}$ sont indépendants?
2. On considère la variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ donnée par:

$$X(i) = \begin{cases} i & \text{si } i \text{ pair} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer $\mathbf{E}[X]$ et $Var(X)$

3. On vous propose le jeu suivant: d'abord vous payez 4 euros, ensuite vous lancez un dé. Si le chiffre est impair, vous recevez 2 euros, s'il est pair vous recevez deux fois ce chiffre en euros. Vous jouez ou non?

1. A et B sont indépendants : $P(A \cap B) = P(\{2\}) = \frac{1}{6}$,

$P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{6} = P(A) \times P(B)$ ✓

2. $E[X] = 1 \times \frac{3}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{2}$

$E[X^2] = 1 \times \frac{3}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 16 \times \frac{1}{6} + 36 \times \frac{1}{6} = \frac{59}{6}$

$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{59}{6} - \frac{25}{4} = \frac{43}{12}$

3. $Y(i) = \begin{cases} 2 & \text{si } i = \text{impair} \\ 2i & \text{si } i \text{ pair} \end{cases}$

Alors $Y = 2X \Rightarrow E[Y] = 2E[X] = 5 > 4$

Donc on joue

Exercice 4 Considérons une variable aléatoire X de densité

$$f(x) = \begin{cases} x^2/9 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Donner la fonction de répartition, $F_X(t)$
2. Calculer $\mathbf{P}(1 \leq X \leq 2)$
3. Si on tire n nombres selon X, quelle est la probabilité qu'ils soient tous entre 1 et 2?

1. $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$. Alors

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{t^3}{27} & \text{si } 0 \leq t \leq 3 \\ 1 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

2. $P(1 \leq X \leq 2) = F_X(2) - F_X(1)$

$$= \int_1^2 \frac{x^2}{9}\,dx = \frac{x^3}{27}\Big|_1^2 = \frac{7}{27}$$

3. $\left(\frac{7}{27}\right)^n$