

Solutions

1) a) Soit $p \in S$ t.q. $(k_1(p), k_2(p)) \neq (0,0)$ c'est à dire p n'est pas planaire. Alors (voir cours 8, p. 7) :

$$p \text{ est } \begin{cases} \text{parabolique si } K = 0 \\ \text{elliptique si } K > 0 \\ \text{hyperbolique si } K < 0 \end{cases}$$

Mais $K(p) = \frac{\det(\tilde{K}_{II}(p))}{\det(\tilde{K}_I(p))}$ et $\det(\tilde{K}_I) = \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 > 0$

d'où $\text{signe}(K(p)) = \text{signe}(\det(\tilde{K}_{II}(p)))$

b) Soient $\varphi(u,v)$ une paramétrisation locale de S autour de p , $\varphi(u_0, v_0) = p$, et $\tilde{\varphi}(x,y)$ une reparamétrisation en coordonnées tangentes. Alors :

- $\tilde{K}_I^{-1}(p) \tilde{K}_{II}(p)$ est conjuguée à $\pm \tilde{\tilde{K}}_{II}(\tilde{0})$ (voir cours 8, p. 4)
- $\tilde{\tilde{K}}_{II}(\tilde{0})$ est conjuguée à $\begin{pmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{pmatrix}$ (voir cours 7)

Donc : $k_1(p) = k_2(p) = 0$ implique que $\tilde{K}_I^{-1}(p) \tilde{K}_{II}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

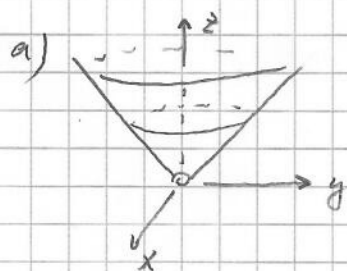
d'où $\tilde{K}_{II}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ car $\tilde{K}_I(p)$ est inversible

Réciproquement, si $\tilde{K}_{II}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $\tilde{K}_I^{-1}(p) \tilde{K}_{II}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d'où $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{pmatrix} \Rightarrow k_1(p) = k_2(p) = 0$

—

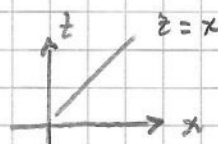
2) $S \subset \mathbb{R}^3$ paramétrisée par $\varphi(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2})$, $(x,y) \neq (0,0)$



Il s'agit d'un cône de révolution :

En coordonnées polaires on a :

$$(r \cos \theta, r \sin \theta, r)$$



Donc S est obtenue en faisant tourner

la courbe $\gamma(r) = (r, 0, r)$, $r > 0$ autour de l'axe O_z

b) $\varphi_x = (1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})$, $\varphi_y = (0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$

$$\varphi_x \wedge \varphi_y = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right)$$

d'où $N_\varphi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right)$

En coordonnées polaires $N(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\cos \theta, -\sin \theta, 1)$

c) L'image de S par l'application de Gauss est la parallèle donnée par $S^2 \cap \{z = \frac{1}{\sqrt{2}}\}$



$\Gamma(S) =$
parallèle $\pi/4$

d) Puisque $\Gamma(S)$ est un cercle, $\text{Aire}(\Gamma(S)) = 0$ donc $K(p) = 0$
 $\forall p \in S$ (voir Cours 9, p. 9 Théorème).

3) Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ le tore de révolution paramétrée par :

$$\varphi(u, v) = ((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \sin u)$$

a) S est obtenue en faisant tourner la courbe paramétrée $\gamma(u) = (2 + \cos u, 0, \sin u)$ autour de l'axe Oz .

Puisque γ est unitaire, on peut utiliser la formule (voir Cones 8, p.5) : $K = -\frac{f''}{f}$, $f(u) = 2 + \cos u$

$$\text{Donc } K(u, v) = \frac{\cos u}{2 + \cos u}$$

$$b) \quad S_+ = \{ \varphi(u, v) \mid -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \} \quad K \geq 0$$

$$S_0 = \{ \varphi(u, v) \mid u = -\frac{\pi}{2} \text{ et } u = \frac{\pi}{2} \} \quad K = 0$$

$$S_- = \{ \varphi(u, v) \mid \frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2} \} \quad K < 0$$

$$\begin{aligned} c) \quad K_T(S) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos u}{2 + \cos u} \overbrace{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}^{2 + \cos u} du dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos u \, du dv \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\sin u \Big|_0^{2\pi} \right) dv = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_T(S_+) &= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u \, du dv \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\sin u \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) dv = 4\pi \end{aligned}$$

$$K_T(S_-) = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos u \, du dv = -4\pi$$

d) Trouvez les images de S_+ , S_0 , S_- par l'application de Gauss.

$$\varphi_u = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u)$$

$$\varphi_v = (-(2+\cos u) \sin v, (2+\cos u) \cos v, 0)$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = (2+\cos u) (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u)$$

$$\text{Donc } N_\varphi(u, v) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u)$$

⚠ Notez que $N_\varphi(u, v) = -\varphi_{S^2}(u, v)$ avec $\varphi_{S^2}(u, v)$ la paramétrisation usuelle de S^2 !

Donc :

$$\Gamma(S_+) = \left\{ N_\varphi(u, v) \mid -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$= S^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

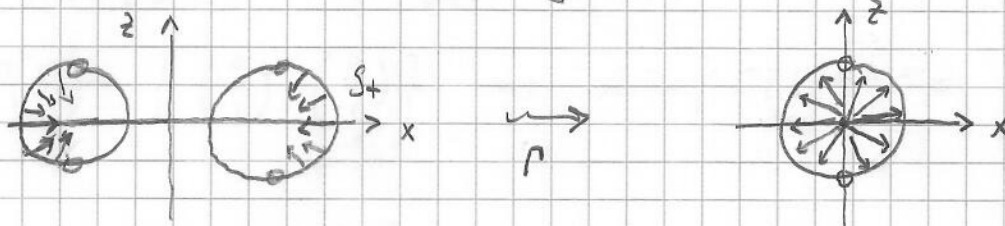


$$\Gamma(S_0) = \left\{ N_\varphi(u, v) \mid u = \frac{\pi}{2}, u = -\frac{\pi}{2} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Gamma(S_-) = \left\{ N_\varphi(u, v) \mid \frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2} \right\}$$

$$= S^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Géométriquement (la section $y=0$)



e) Notons N_φ par N . Alors $N = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u)$
 d'où :

$$N_u = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, -\cos u)$$

$$N_v = (\cos u \sin v, -\cos u \cos v, 0)$$

$$N_u \wedge N_v = \begin{pmatrix} -\cos^2 u \cos v \\ -\cos^2 u \sin v \\ -\sin u \cos u \end{pmatrix} = \cos u \begin{pmatrix} -\cos u \cos v \\ -\cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow N_u \wedge N_v = \frac{\cos u}{2 + \cos u} \varphi_u \wedge \varphi_v = K(u, v) \varphi_u \wedge \varphi_v \quad (\text{comparez cours 9, p. 9})$$

$$\Rightarrow N_u \wedge N_v = \begin{cases} \alpha \varphi_u \wedge \varphi_v & \alpha > 0 & \text{sur } S_+ \\ \alpha \varphi_u \wedge \varphi_v & \alpha < 0 & \text{sur } S_- \end{cases}$$

Alors d'après d) $\Gamma(S_+) = \Gamma(S_-) = S^2 - \{N, S\}$

$$\text{d'où } \begin{cases} \text{Aire } \Gamma(S) = \underbrace{\text{Aire}(\Gamma(S_+))}_{4\pi} + \underbrace{\text{Aire}(\Gamma(S_-))}_{4\pi} = 8\pi \\ \text{Aire algébrique}(\Gamma(S)) = 4\pi - 4\pi = 0 \end{cases}$$

Remarques :

$$1. \text{ Aire}(S^2) = 4\pi r^2|_{r=1} = \boxed{4\pi}$$

$$2. \Gamma(S_0) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \text{Aire}(\Gamma(S_0)) = 0$$