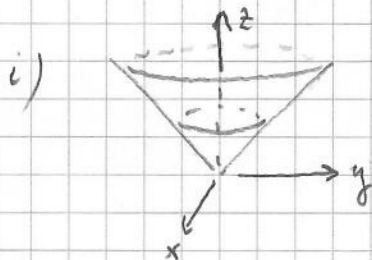


Solutions

1) Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  la surface paramétrisée par  $\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ ,  $u > 0$ .



Il s'agit d'un cône (privé du sommet)

ii)  $\varphi_u = (\cos v, \sin v, 1)$  ;  $\varphi_v = (-u \sin v, u \cos v, 0)$

$$E = \varphi_u \cdot \varphi_u = 2$$

$$F = \varphi_u \cdot \varphi_v = 0$$

$$G = \varphi_v \cdot \varphi_v = u^2$$

$$\left. \begin{array}{l} PFF: 2 du^2 + u^2 dv^2 \\ \tilde{F}_I(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

iii)  $\alpha(t) = (e^t, t)$  ;  $\gamma(t) = \varphi(\alpha(t))$

$$u = e^t \quad \frac{du}{dt} = e^t \quad ; \quad v = t \quad \frac{dv}{dt} = 1$$

$$L(\gamma) = \int_0^\pi [2 e^{2t} + e^{2t}]^{1/2} dt$$

$$= \sqrt{3} \int_0^\pi e^t dt = \underline{\underline{\sqrt{3} (e^\pi - 1)}}$$

2) Soient  $\varphi: \Omega \rightarrow S$  une paramétrisation locale et  $f(X) = AX + b$ ,  $A \in SO(3)$ , une isométrie directe de  $\mathbb{R}^3$ . Alors  $f \circ \varphi: \Omega \rightarrow f(S)$  est aussi une paramétrisation locale de  $f(S)$ .

On montre que  $\tilde{F}_I(\varphi) = \tilde{F}_I(f \circ \varphi)$ . En effet,

$$(f \circ \varphi)_u = (A \circ \varphi)_u = A \varphi_u \quad ; \quad (f \circ \varphi)_v = (A \circ \varphi)_v = A \varphi_v$$

d'où  $\langle (f \circ \varphi)_u, (f \circ \varphi)_u \rangle = \langle A \varphi_u, A \varphi_u \rangle \stackrel{*}{=} \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle$

\* car  $A \in SO(3)$

Donc  $E(f \circ \varphi) = E(\varphi)$ . De même pour  $F$  et  $G$

3) Soient  $\varphi: \Omega \rightarrow S$  une paramétrisation locale régulière,  
 $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \phi: \tilde{\Omega} \rightarrow S$  une reparamétrisation de  $\varphi$   
 ( $\phi: \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$  un difféomorphisme  $\mathcal{C}^\infty$ )

i)  $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \phi \Rightarrow \tilde{\varphi}$  est  $\mathcal{C}^\infty$  car  $\varphi$  et  $\phi$  sont  $\mathcal{C}^\infty$ .

On montre dans ii) que  $\|\tilde{\varphi}_u \wedge \tilde{\varphi}_v\| = |\det J(\phi)| \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$

( $\phi(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u, v)$ ). Comme  $\det J(\phi) \neq 0$ , on a que

$\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \neq 0 \Leftrightarrow \|\tilde{\varphi}_u \wedge \tilde{\varphi}_v\| \neq 0$  d'où  $\varphi$  régulière

implique  $\tilde{\varphi}$  régulière.

ii) Si  $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \phi$  alors  $J(\tilde{\varphi}) = J(\varphi) J(\phi)$  d'où (cours 6, p. 7)

$$\mathcal{F}_I(\tilde{\varphi}) = J(\tilde{\varphi})^t J(\tilde{\varphi}) = J(\phi)^t J(\varphi)^t J(\varphi) J(\phi) = J(\phi)^t \mathcal{F}_I(\varphi) J(\phi)$$

Maintenant,  $\|\tilde{\varphi}_u \wedge \tilde{\varphi}_v\| = (\det \mathcal{F}_I(\tilde{\varphi}))^{1/2}$  (cours 6, p. 11)

d'où  $\|\tilde{\varphi}_u \wedge \tilde{\varphi}_v\| = |\det J(\phi)| (\det \mathcal{F}_I(\varphi))^{1/2} = |\det J(\phi)| \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$

iii) Soient  $\phi: \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ ,  $\tilde{D} \subset \tilde{\Omega}$ ,  $D = \phi(\tilde{D})$ ,  $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \phi$   
 $(\tilde{u}, \tilde{v}) \mapsto (u, v)$

une reparamétrisation de  $\varphi$  par  $\phi$ .

$$\text{Aire}(\tilde{\varphi}(\tilde{D})) = \iint_{\tilde{D}} \|\tilde{\varphi}_u \wedge \tilde{\varphi}_v\| d\tilde{u} d\tilde{v} \quad (\text{définition})$$

$$= \iint_{\tilde{D}} (\det \mathcal{F}_I(\tilde{\varphi}))^{1/2} d\tilde{u} d\tilde{v}$$

$$= \iint_{\tilde{D}} (\det \mathcal{F}_I(\varphi))^{1/2} |\det J(\phi)| d\tilde{u} d\tilde{v} \quad (ii)$$

$$= \iint_D (\det J_I(\varphi))^{1/2} du dv$$

Formule de changement de variables dans l'intégrale double

$$= \iint_D \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| du dv$$

$$= \text{Aire}(\varphi(D))$$

4) Soit  $\varphi(u, v) = ((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \sin u)$  paramétrisation du tore,  $T$ .

$$i) \varphi_u = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u)$$

$$\varphi_v = (-(2 + \cos u) \sin v, (2 + \cos u) \cos v, 0)$$

$$E = \varphi_u \cdot \varphi_u = 1$$

$$F = \varphi_u \cdot \varphi_v = 0$$

$$G = \varphi_v \cdot \varphi_v = (2 + \cos u)^2$$

$$\text{PFF} : du^2 + (2 + \cos u)^2 dv^2$$

$$J_I(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2 + \cos u)^2 \end{pmatrix}$$

$$ii) \text{Aire}(T) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\det J_I(\varphi))^{1/2} du dv$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (2 + \cos u) du dv = 8\pi^2$$

5)  $S^3 \subset \mathbb{R}^3$  paramétrisée par  $\varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$

$$i) \varphi_x = (1, 0, 2x), \quad \varphi_y = (0, 1, 2y) \quad \text{donc}$$

$$\text{PFF} : (1 + 4x^2) dx^2 + 8xy dx dy + (1 + 4y^2) dy^2$$

$$J_I(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 + 4x^2 & 4xy \\ 4xy & 1 + 4y^2 \end{pmatrix}$$

$$ii) \text{Aire}(\varphi(D)) = \iint_D (EG - F^2)^{1/2} dx dy = \iint_D (1 + 4x^2 + 4y^2)^{1/2} dx dy$$

Changement en coordonnées polaires :  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, dx dy = r dr d\theta$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 4r^2)^{1/2} r dr d\theta = \frac{\pi}{6} (5^{3/2} - 1)$$