

Solutions

1)  $S$  est le graphe de la fonction  $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$ . Donc

$\varphi(x,y) = (x, y, 4x^2 + 9y^2)$  paramétrise  $S$ . Cette paramétrisation est clairement  $C^\infty$ . Elle est régulière car  $\text{rang}(d\varphi) = 2$ . En effet

$$[d\varphi(x,y)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 8x & 18y \end{pmatrix} \text{ qui est de rang } 2 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^2$$

On peut aussi noter que :

$$\varphi_x \wedge \varphi_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8x \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 18y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8x \\ -18y \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

2) i)  $\varphi(u,v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$  est  $C^\infty$  et

$$\begin{aligned} \varphi_u \wedge \varphi_v &= \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos^2 u \cos v \\ -\cos^2 u \sin v \\ -\cos u \sin u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = (\cos^4 u + \cos^2 u \sin^2 u)^{1/2}$$

$$= |\cos u| \neq 0 \quad \text{car} \quad -\pi/2 < u < \pi/2$$

donc  $\varphi(u,v)$  est régulière.

ii).  $\varphi\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ . Donc instant  $p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ,

$$T_p(S^2) = \text{Im} \left( d\varphi\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \right)$$

$$d\varphi\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v & -\cos u \sin v \\ -\sin u \sin v & \cos u \cos v \\ \cos u & 0 \end{pmatrix} \Big|_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Donc  $T_p S^2 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$= \left\{ (x, y, z) \mid \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z = 0 \right\}$$

Maintenant, en  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$  :

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

d'où

$$N_{\varphi}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Big/ \left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\| = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

- 3)  $\gamma(u) = (1, 0, u)$  d'où la surface de révolution,  $S$ , obtenue en faisant tourner la courbe géométrique  $\gamma$  autour de l'axe  $O_z$  est donnée par :

$$\varphi(u, v) = (\cos v, \sin v, u) \quad u, v \in \mathbb{R}^2$$

(voir cours 5, p. 5)

- i) Il s'agit du cylindre  $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

- ii) Un atlas de paramétrisations locales est :  $\{(\varphi, \Omega_1), (\varphi, \Omega_2)\}$   
avec  $\varphi$  ci-dessus et  $\Omega_1 = \{(u, v) \mid 0 < v < 2\pi\}$ ,  
 $\Omega_2 = \{(u, v) \mid -\pi < v < \pi\}$

Notez que  $\varphi$  est  $C^\infty$  et régulière car

$$d\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin v \\ 0 & \cos v \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est de rang 2}$$

- iii)  $\varphi(1, 0) = (1, 0, 1)$  avec  $(1, 0) \in \Omega_2$

$$d\varphi(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc}$$

$$T_p S = \text{Im} \{ d\varphi(1, 0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \text{Plan } yO_z$$

Maintenant,

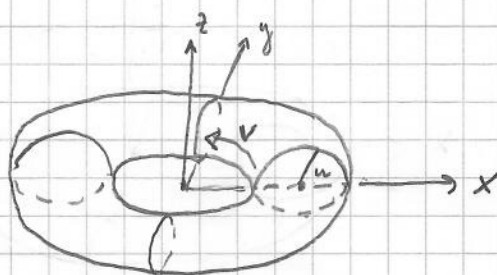
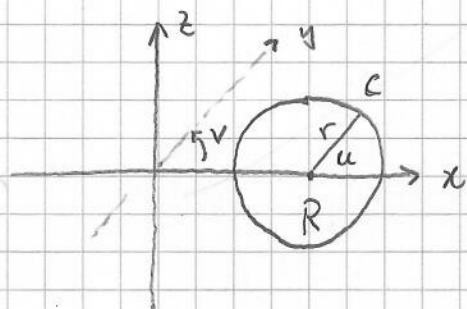
$$\varphi_u(1,0) \wedge \varphi_v(1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$N_\varphi(1,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4) i) Le cercle  $C$  est paramétrée par  $\gamma(u) = (R+r\cos u, 0, r\sin u)$   
d'où la tore de révolution correspondant,  $T$ , est paramétrée  
par

$$\varphi(u,v) = ((R+r\cos u) \cos v, (R+r\cos u) \sin v, r\sin u)$$



$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow T$  est surjective et régulière :  $C^\infty$  et

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \begin{pmatrix} -r \sin u \cos v \\ -r \sin u \sin v \\ r \cos u \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -(R+r\cos u) \sin v \\ (R+r\cos u) \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

(5)

d'où (après calculs)

$$\| \varphi_u \wedge \varphi_v \| = |(R + r \cos u) r| \neq 0 \quad \text{car } 0 \leq r < R$$

ii)  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow T$  est surjective mais clairement pas injective.

Mais on peut obtenir un atlas de paramétrisations locales pour  $T$  en prenant :

$$\{ (\varphi, \Omega_1), \dots, \varphi(\Omega_4) \}$$

avec

$$\Omega_1 = \{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u < 2\pi, \quad 0 < v < 2\pi \}$$

$$\Omega_2 = \{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u < 2\pi, \quad -\pi < v < \pi \}$$

$$\Omega_3 = \{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < u < \pi, \quad 0 < v < 2\pi \}$$

$$\Omega_4 = \{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < u < \pi, \quad -\pi < v < \pi \}$$