

Solutions

$$\begin{aligned}
 1) \quad \det \begin{pmatrix} i & u_1 & v_1 \\ j & u_2 & v_2 \\ k & u_3 & v_3 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \\
 &= (u_2 v_3 - u_3 v_2) i - (u_1 v_3 - u_3 v_1) j + (u_1 v_2 - u_2 v_1) k \\
 &= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \\
 &= u \wedge v
 \end{aligned}$$

$$2) \quad (1, 1, 0) \wedge (1, -1, 0) = (0, 0, -2)$$

$$3) \quad \gamma(s) = \left(\frac{4}{5} \cos s, 1 - \sin s, -\frac{3}{5} \cos s \right)$$

$$T(s) = \left(-\frac{4}{5} \sin s, -\cos s, \frac{3}{5} \sin s \right)$$

$$K(s) = 1$$

$$N(s) = \left(-\frac{4}{5} \cos s, \sin s, \frac{3}{5} \cos s \right)$$

$$B(s) = \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5} \right)$$

$$\tau(s) = 0$$

Vérification des équations de Frenet-Serret (on fait la seconde):

$$N'(s) = -K(s) T(s) + \tau(s) B(s)$$

$$\left(\frac{4}{5} \sin s, \cos s, -\frac{3}{5} \sin s \right) = -1 \left(-\frac{4}{5} \sin s, -\cos s, \frac{3}{5} \sin s \right) + 0 \quad \checkmark$$

$$4) \quad i) \quad \gamma(s) = \gamma(0) + \gamma'(0)s + \frac{\gamma''(0)}{2} s^2 + \frac{\gamma'''(0)}{6} s^3 + O(s^4)$$

$$\Rightarrow \gamma(s) - \gamma(0) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) s + \left(-\frac{1}{4}, 0, 0 \right) s^2 + \left(0, -\frac{1}{12\sqrt{2}}, 0 \right) s^3 + O(s^4)$$

$$ii) \quad (T, N, B) = (T(0), N(0), B(0)) \quad \text{donc:}$$

$$T = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad N = (-1, 0, 0), \quad B = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

(On peut vérifier que (T, N, B) est un trièdre orthonormé direct)

d'où

$$(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = T \quad ; \quad (-\frac{1}{4}, 0, 0) = \frac{1}{4} N \quad ; \quad \text{et}$$

$$(0, -\frac{1}{12\sqrt{2}}, 0) = \frac{1}{24} (B - T)$$

Alors $\gamma(s) - \gamma(0) = (s - \frac{1}{24}s^3)T + (\frac{1}{4}s^2)N + (\frac{1}{24}s^3)B + O(s^4)$

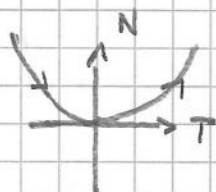
d'où $\gamma(s) \approx (s, \frac{1}{4}s^2, \frac{1}{24}s^3)$ dans la base (T, N, B)

lorsque s est près de 0

⚠ Notez que, suivant §3 du Cours 3, on aurait pu écrire directement $\gamma(s) \approx (s, \frac{\kappa}{2}s^2, \frac{\kappa\tau}{6}s^3)$ dans la base (T, N, B) et substituer $\kappa(0) = \tau(0) = \frac{1}{2}$

iii)

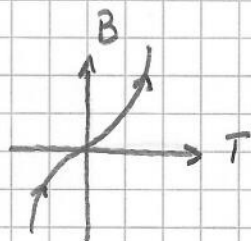
Projections de $\gamma(s)$ dans les plans de coordonnées :



Plan osculateur

$$\text{pr}(\gamma(s)) \approx (s, \frac{1}{4}s^2)$$

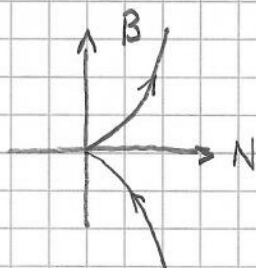
parabole



Plan rectifiant

$$\text{pr}(\gamma(s)) \approx (s, \frac{1}{24}s^3)$$

cubique



Plan normal

$$\text{pr}(\gamma(s)) \approx (\frac{1}{4}s^2, \frac{1}{24}s^3)$$

rebroussement

$$5) \quad \gamma(s) = \left(\frac{4}{5} \cos s, 1 - \sin s, -\frac{3}{5} \cos s \right)$$

i) D'abord $\kappa(s) = 0$ (voir exercice 3) donc $\gamma(s)$ est une courbe plane d'après la Proposition, p.5 du cours 3.

ii) Maintenant, suivant la méthode de TD 2, exercice 7, on pose

$$f(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)} N(s). \quad \text{Puisque } \kappa(s) = 1 \quad \forall s, \text{ on a}$$

$$f'(s) = \gamma'(s) + N'(s) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ \Rightarrow N'(s) = -T(s) \end{array} \right)$$

$$\text{Donc } f(s) = \gamma(s) + N(s) = \vec{c}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{4}{5} \cos s, 1 - \sin s, -\frac{3}{5} \cos s \right) + \left(-\frac{4}{5} \cos s, \sin s, \frac{3}{5} \cos s \right) = \vec{c}$$

$$\Rightarrow \vec{c} = (0, 1, 0)$$

$$\text{Donc } \|\gamma(s) - (0, 1, 0)\| = \|N(s)\| = 1 \quad \text{ce qui montre que}$$

$\gamma(s)$ est sur la sphère, S , de centre $\vec{c} = (0, 1, 0)$ et de rayon 1.

iii) D'après i) $\gamma(s)$ est dans le plan P orthogonal à $B = (-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5})$ et qui contient le centre de S , le point $(0, 1, 0)$. En effet, $\gamma(s) - (0, 1, 0) = -N(s)$ qui est parallèle à P car orthogonal à B . Donc l'intersection $S \cap P$ est un grand cercle sur S , donc $\gamma(s)$ est un arc de (grand) cercle de centre $\vec{c} = (0, 1, 0)$ et de rayon 1.

Finalement le plan P est orthogonal à $B = (-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5})$ et il contient le point $\vec{c} = (0, 1, 0)$. Donc

$$P = \left\{ (x, y, z) \mid (x, y-1, z) \cdot \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right) = 0 \right\}$$

$$P = \left\{ (x, y, z) \mid 3x + 4z = 0 \right\}$$