

Solutions

1) Soit $\delta(u) = \gamma(h(u))$ une reparamétrisation de $\gamma(t)$ régulière.

Alors

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \underbrace{u}_{J} \quad \underbrace{t}_{I} \end{array} \xrightarrow{\gamma} \quad \text{ } \quad t = h(u), \quad h' > 0$$

$$\delta'(u) = \gamma'(h(u)) h'(u) = \gamma'(t) h'(u) \neq \bar{0}$$

car $\gamma'(t) \neq \bar{0}$ et $h'(u) > 0$ par hypothèse

2) Il suffit de montrer que $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$ est $\mathcal{C}^\infty$. Posez

$f(t) = s'(t) = \|\gamma'(t)\|$ et notez que $f(t) > 0$ car $\gamma(t)$ est régulière. Maintenant,

i) $f(t)$ est la composée de deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$. En effet,

$$f(t) = f_2 \circ f_1(t) \text{ avec}$$

$$f_1: I \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \text{ donnée par } f_1(t) = \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle =$$

$$(x_1'(t))^2 + \dots + (x_n'(t))^2 \text{ qui est } \mathcal{C}^\infty \text{ car } \gamma(t) \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ par hypothèse.}$$

$$f_2: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \text{ donnée par } f_2(x) = \sqrt{x} \text{ qui est } \mathcal{C}^\infty.$$

ii) $f_2 \circ f_1$ est $\mathcal{C}^\infty$ car de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \geq 1$.

En effet, appliquant le théorème de dérivation des fonctions composées k fois permet d'exprimer $(f_2 \circ f_1)^{(k)}(t)$ en termes de $f_1, f_1', \dots, f_1^{(k)}, f_2, f_2', \dots, f_2^{(k)}$. Par exemple

$$f_2(f_1(t))' = f_2'(f_1(t)) f_1'(t)$$

$$f_2(f_1(t))'' = (f_2'(f_1(t)) f_1'(t))' =$$

$$= f_2''(f_1(t))(f_1'(t))^2 + f_2'(f_1(t)) f_1''(t)$$

et ainsi de suite ...

3) Soit $\gamma(u) = \gamma(h(u))$ une reparamétrisation unitaire de $\gamma(t)$.

$$\left(\frac{u}{J} \right) \xrightarrow{h} \left(\frac{t}{I} \right) \xrightarrow{\gamma} \gamma$$

$$h: J \rightarrow I \text{ difféo ; } h' > 0 \\ t = h(u)$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \gamma'(u) &= \gamma'(h(u)) h'(u) \\ &= \gamma'(t) \frac{dt}{du} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } 1 = \|\gamma'(u)\| &= \|\gamma'(t)\| \left| \frac{dt}{du} \right| \\ &= \|\gamma'(t)\| \frac{dt}{du} \end{aligned}$$

$$\text{car } \frac{dt}{du} = h'(u) > 0$$

$$\text{donc } \frac{du}{dt} = \|\gamma'(t)\|.$$

$$\text{Mais on a également } \frac{ds}{dt} = \|\gamma'(t)\|, \text{ d'où } \frac{du}{dt} = \frac{ds}{dt}$$

$$\text{donc } u = s + c, \text{ } c \text{ constante.}$$

$$4) \gamma(t) = \left(\frac{1}{3} (1+t)^{3/2}, \frac{1}{3} (1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{d'où}$$

$$\gamma'(t) = \left(\frac{1}{2} (1+t)^{1/2}, -\frac{1}{2} (1-t)^{1/2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (\text{Voir TD n°1, Ex 4})$$

$$\text{et } \|\gamma'(t)\| = 1$$

$$\text{Donc } K(t) = \|\gamma''(t)\| = \frac{1}{\sqrt{8(1-t^2)}}$$

$$\left(\gamma''(t) = \left(\frac{1}{4} (1+t)^{-1/2}, \frac{1}{4} (1-t)^{-1/2}, 0 \right) \right)$$

5) $\gamma(s)$ unitaire t.q. $K(s) = \|\gamma''(s)\| = 0 \quad \forall s$.

$$\text{Donc } \gamma''(s) = \vec{0} \quad \forall s \quad \Rightarrow \quad \gamma'(s) = \vec{a} \quad \|\vec{a}\| = 1 \quad \text{car} \\ \|\gamma'(s)\| = 1$$

$$\Rightarrow \gamma(s) = \vec{a}s + \vec{b}$$

6) On a les équations suivantes (on note le produit scalaire par $\cdot$)

$$i) \quad T(s) \cdot N(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad T'(s) \cdot N(s) + T(s) \cdot N'(s) = 0$$

$$ii) \quad T'(s) = \tilde{K}(s) N(s)$$

$$iii) \quad N(s) \cdot N(s) = 1 \quad \Rightarrow \quad N'(s) \cdot N(s) = 0$$

Donc

$$i) + ii) \quad \Rightarrow \quad T(s) \cdot N'(s) = -\tilde{K}(s)$$

$$i) + iii) \quad \Rightarrow \quad N'(s) \parallel T(s) \quad (\text{car } N(s) \perp T(s) \text{ et } N'(s) \perp N(s))$$

$$\Rightarrow N'(s) = c T(s)$$

$$\Rightarrow N'(s) \cdot T(s) = c T(s) \cdot T(s) = c$$

$$\text{d'où } c = -\tilde{K}(s)$$

$$\text{et } N'(s) = -\tilde{K}(s) T(s)$$

7) Soit $\gamma(s) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $K(s) = \rho > 0$ constante. On

$$\text{pose } f(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\tilde{K}(s)} N(s).$$

$$\text{Alors } f'(s) = \gamma'(s) + \frac{1}{\tilde{K}(s)} N'(s) \quad \text{car } \tilde{K}(s) \text{ est constante}$$

$$= T(s) + \frac{1}{\tilde{K}(s)} (-\tilde{K}(s) T(s)) \quad \text{par Exercice 6}$$

$$= 0$$

$$\text{Donc } f(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\tilde{K}(s)} N(s) = \vec{c} \quad f(s) \text{ constante}$$

$$\text{d'où } \gamma(s) - \vec{c} = -\frac{1}{\tilde{K}(s)} N(s)$$

$$\text{d'où } \|\gamma(s) - \vec{c}\| = \left\| \frac{1}{\tilde{K}(s)} N(s) \right\| = \frac{1}{\rho}$$

$\Rightarrow \gamma(s)$ un arc du cercle centré en $\vec{c}$ et de rayon $\frac{1}{\rho}$

Autrement :

D'après Cours 2, $\gamma(s)$ est déterminée, à isométrie directe près, par sa courbure algébrique, $\tilde{K}(s)$ (voir §4, Théorème).

Mais par hypothèse, $K(s) = \rho > 0$ d'où $\tilde{K}(s) = \rho \forall s$ ou $\tilde{K}(s) = -\rho \forall s$. Supposons d'abord que $\tilde{K}(s) = \rho$.

$$\text{Alors: } \theta(s) = \int_0^s \rho \, du = \rho s$$

Par la
méthode des
Théorème

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \left(\int_0^s \cos(\rho t) \, dt, \int_0^s \sin(\rho t) \, dt \right) \\ &= \left(\frac{1}{\rho} \sin(\rho s), -\frac{1}{\rho} (\cos(\rho s) - 1) \right) \\ &= \left(0, -\frac{1}{\rho} \right) + \left(\frac{1}{\rho} \sin(\rho s), -\frac{1}{\rho} \cos(\rho s) \right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \gamma(0) = (0, 0); \quad \gamma'(0) = (1, 0), \quad \gamma''(0) = (0, \rho)$$

et il s'agit du cercle de rayon $\frac{1}{\rho}$ centré en $(0, \frac{1}{\rho})$ orienté sens direct avec $\tilde{K}(s) = \rho$

Supposons que $\tilde{K}(s) = -\rho$. Alors $\theta(s) = -\rho s$ et

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \left(\int_0^s \cos(-\rho t) \, dt, \int_0^s \sin(-\rho t) \, dt \right) \\ &= \left(0, -\frac{1}{\rho} \right) + \left(-\frac{1}{\rho} \sin(-\rho s), \frac{1}{\rho} \cos(-\rho s) \right) \end{aligned}$$

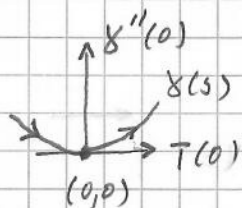
$$\text{Donc } \gamma(0) = (0, 0), \quad \gamma'(0) = (1, 0), \quad \gamma''(0) = (0, -\rho)$$

et il s'agit du cercle de rayon $\frac{1}{\rho}$ centré en $(0, -\frac{1}{\rho})$ orienté sens des aiguilles d'une montre avec $\tilde{K}(s) = -\rho$

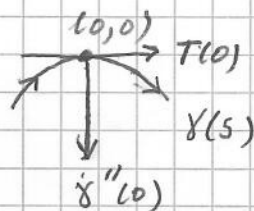
(8)

Soit $\gamma(s) \in \mathbb{R}^2$ unitaire t.q. $\kappa(s_0) = \rho \neq 0$.

Sans perdre en généralité, on peut supposer que : $s_0 = 0$; $\gamma(0) = (0,0)$;
 $\gamma'(0) = (1,0)$, $\gamma''(0) = (0, \tilde{\kappa}(0)) = (0, \pm \rho)$



$$\tilde{\kappa}(0) = \rho$$

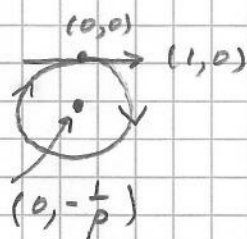
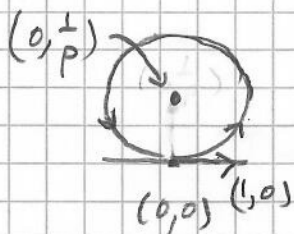


$$\tilde{\kappa}(0) = -\rho$$

Soit $\beta(s) \in \mathbb{R}^2$ unitaire un cercle paramétré avec C le cercle géométrique orienté associé à $\beta(s)$.

Si $\beta(0) = \gamma(0) = (0,0)$, $\beta'(0) = \gamma'(0) = (1,0)$, et
 $\beta''(0) = \gamma''(0) = (0, \pm \rho)$ alors :

- La courbure de $\beta(s)$ est $\kappa(0) = \|\beta''(0)\| = \|\gamma''(0)\| = \rho$
 donc le rayon de C est $R = \frac{1}{\rho}$ (voir Cours 2)
- Comme $\beta(s)$ est tangent à l'axe O_x en $(0,0)$ le centre de C doit être sur l'axe O_y au point $(0, \frac{1}{\rho})$
 si $\tilde{\kappa}(0) = \rho$ resp. au point $(0, -\frac{1}{\rho})$ si $\tilde{\kappa}(0) = -\rho$.



Mais d'après Exercice 7 ci-dessus

$$\beta(s) = (0, \frac{1}{\rho}) + (\frac{1}{\rho} \sin(\rho s), -\frac{1}{\rho} \cos(\rho s)) \text{ vérifie}$$

$$\beta(0) = \gamma(0) ; \beta'(0) = \gamma'(0) ; \beta''(0) = \gamma''(0) \text{ lorsque } \tilde{\kappa}(0) = \rho$$

et

$$\beta(s) = (0, -\frac{1}{\rho}) + (-\frac{1}{\rho} \sin(-\rho s), \frac{1}{\rho} \cos(-\rho s))$$

Vérifie $\beta(0) = \gamma(0)$; $\beta'(0) = \gamma'(0)$; $\beta''(0) = \gamma''(0)$

lorsque $\tilde{K}(0) = -\rho$

D'après Cours 2, §4 Théorème on a que $\beta(s)$ est déterminée à isométrie directe de $\mathbb{R}^2$ par $\tilde{K}(s)$.

Mais cette isométrie doit fixer le centre du cercle $\Rightarrow$ il s'agit d'une rotation. Aussi le vecteur tangent $\beta'(0) = (1, 0)$ est fixé $\Rightarrow$ la rotation est triviale ($= \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$). Donc $\beta(s)$ est uniquement déterminée.

Autre preuve (plus calculatoire) : L'équation générale pour un cercle paramétré unitaire est :

$$\beta(s) = (x_0, y_0) + R \cos \frac{s}{R} V_1 + R \sin \frac{s}{R} V_2$$

avec $V_1 \cdot V_2 = \delta_{ij}$ ($\|V_1\| = \|V_2\| = 1$; $V_1 \cdot V_2 = 0$)

On utilise le fait que $\beta(0) = \gamma(0)$; $\beta'(0) = \gamma'(0)$; $\beta''(0) = \gamma''(0)$ afin de trouver (x_0, y_0) , R , V_1 et V_2 :

$$i) \beta(0) = (x_0, y_0) + R V_1 = \gamma(0) = (0, 0)$$

$$ii) \beta'(0) = V_2 = \gamma'(0) = (1, 0)$$

$$iii) \beta''(0) = -\frac{1}{R} V_1 = \gamma''(0) = \tilde{K}(0) N(0) = \pm \rho (0, 1)$$

Donc :

$$i) \Rightarrow (x_0, y_0) = -R V_1 \quad ii) \Rightarrow \boxed{V_2 = (1, 0)} \quad \text{d'où } V_1 = (0, \pm 1)$$

$$iii) \Rightarrow \frac{1}{R} (-V_1) = \gamma''(0) = \rho (0, \pm 1) \Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{\rho}} \quad \text{car } R \text{ et } \rho \text{ positifs par hypothèse}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_1 = -\frac{1}{\rho} \gamma''(0)}$$

Donc finalement,

$$i) + iii) \Rightarrow \boxed{(x_0, y_0) = -R V_1 = \frac{1}{\rho_2} \gamma''(0)}$$