

Solutions

- 1) Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface paramétrisée compacte avec $p \in S$ un point à distance maximale de $\bar{D}$. Si $\|\vec{p}\| = r$, montrez que $K(p) \geq \frac{1}{r^2}$

Rip: Voir Cours 10, Théorème 2. On a montré que :

- $\vec{p}$ est orthogonal à $T_p S$
- $\gamma(0) \cdot \gamma''(0) + 1 \leq 0$ pour toute courbe $\gamma \in S$ unitaire t.q. $\gamma(0) = p$.

Maintenant, soit $\varphi: \Omega \rightarrow S$ une paramétrisation locale t.q.

$p \in \varphi(\Omega)$. Notons $N = N_\varphi(p)$ la normale à S en p donnée par φ . Alors $N = \pm \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|} = \pm \frac{\vec{p}}{r}$, d'où

$\gamma(0) \cdot \gamma''(0) + 1 \leq 0$ peut s'écrire comme :

$$N \cdot \gamma''(0) \leq -\frac{1}{r} \quad \text{ou} \quad N \cdot \gamma''(0) \geq \frac{1}{r} \quad \text{selon le signe dans } N = \pm \frac{\vec{p}}{r}$$

En particulier ceci est vrai pour les sections normales, γ_θ , définies par rapport à N et $T_p S$ (voir Cours 7, p. 4)

$$\text{Donc } k_\theta \leq -\frac{1}{r} \quad \forall \theta \quad \text{ou bien } k_\theta \geq \frac{1}{r} \quad \forall \theta$$

$$\text{d'où } K(p) = k_1(p) k_2(p) \geq \frac{1}{r^2}$$

- 2) $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface minimale d'où la courbure moyenne $H(p) = 0 \quad \forall p \in S$. Ceci implique que $k_1(p) = -k_2(p) \quad \forall p \in S$. Donc $K(p) \leq 0 \quad \forall p \in S$.

a) D'après Théorème 2 du Cours 10, une surface compacte admet un point pour lequel $K > 0$. Donc S minimale ne peut pas être compacte

b) Par contre S minimale peut avoir un point ombilic : si S est un plan, alors $k_1(p) = k_2(p) = 0 \quad \forall p \in S$.

- 3) Si $S \subset \mathbb{R}^3$ admet un atlas de deux paramétrisations locales $A = \{(\varphi_1, \Omega_1), (\varphi_2, \Omega_2)\}$ t.q. $\varphi_1(\Omega_1) \cap \varphi_2(\Omega_2)$ est connexe, alors S est orientable.

En effet chaque paramétrisation φ_i ($i=1,2$) définit une normale N_i à chaque point de $\varphi_i(\Omega_i)$. Comme $\varphi_1(\Omega_1) \cap \varphi_2(\Omega_2)$ est connexe, on a soit $N_1 = N_2$ à chaque point de $\varphi_1(\Omega_1) \cap \varphi_2(\Omega_2)$ soit $N_1 = -N_2$ à chaque point de $\varphi_1(\Omega_1) \cap \varphi_2(\Omega_2)$.

- Si $N_1 = N_2$ en $\varphi_1(\Omega_1) \cap \varphi_2(\Omega_2)$ alors $\{(\varphi_1, \Omega_1), (\varphi_2, \Omega_2)\}$ définissent $N(p)$ de façon unique en tout point $p \in S$.
- Si $N_1 = -N_2$ en $\varphi_1(\Omega_1) \cap \varphi_2(\Omega_2)$, on modifie $\varphi_1(u,v)$ en changeant u en v et v en u ce qui a pour résultat de changer N_1 en $-N_1$ d'où $N_1 = N_2$.

- 4) Si $S = \{(x,y,z) \mid g(x,y,z) = c\}$ avec $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ et $Dg(p) \neq 0 \quad \forall p \in S$, alors S est orientable.

En effet, considérez le gradient ∇g . On montre que :

- $\nabla g(p) \neq \vec{0} \quad \forall p \in S$
- $\nabla g(p)$ est orthogonal à $T_p S$ à chaque point $p \in S$.

Alors $N(p) = \frac{\nabla g(p)}{\|\nabla g(p)\|} : S \rightarrow S^2$ est une application bien définie et continue (car C^∞). Donc S est orientable.

$\nabla g(p) \neq 0$: En effet, $Dg(p) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(p), \frac{\partial g}{\partial y}(p), \frac{\partial g}{\partial z}(p) \right) \neq 0$ par hypothèse. Donc $\nabla g(p) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(p), \frac{\partial g}{\partial y}(p), \frac{\partial g}{\partial z}(p) \right) \neq \vec{0}$.

$\nabla g(p) \perp T_p S$: Soit $\vec{v} \in T_p S$. Alors $Dg(p) \vec{v} = 0$ (car $T_p S = \text{Ker } Dg(p)$)
d'où $\nabla g(p) \cdot \vec{v} = Dg(p) \vec{v} = 0 \quad \forall \vec{v} \in T_p S$.

5) a) $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la sphère unité. Alors S^2 admet deux orientations :

- $N(p) = \vec{p} \quad \forall p \in S^2$ qui correspond à la paramétrisation donnée par $\tilde{\varphi}(u, v) = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v)$



- $N(p) = -\vec{p} \quad \forall p \in S^2$ qui correspond à la paramétrisation "usuelle" donnée par :

$$\varphi(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$$



b) D'après (a) les deux applications de Gauss sont :

$$\Gamma_1 : S^2 \rightarrow S^2 \quad \Gamma_1 = Id \\ p \mapsto p$$

$$\Gamma_2 : S^2 \rightarrow S^2 \quad \Gamma_2 : \text{application antipodale} \\ p \mapsto -p$$

$$\text{Donc si } R \subset \Omega, \text{ alors } \frac{\text{Aire } \Gamma_1(R)}{\text{Aire } \varphi(R)} = 1 \quad \text{donc } |K(p)| = 1$$

c) Considérons $\varphi(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$. Alors

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \cos u (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u)$$

$$N(u, v) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u)$$

$$N_u = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, -\cos u)$$

$$N_v = (\cos u \sin v, -\cos u \cos v, 0)$$

$$\text{d'où } N_u \wedge N_v = \cos u (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u)$$

$$\Rightarrow N_u \wedge N_v = \varphi_u \wedge \varphi_v \quad \text{Donc } K(u, v) = 1 \quad \left(\text{voir Cours 9, p. 8 Proposition} \right)$$