Université de Rennes 1 Année 2020–2021
Licence 3 Module CSP

Examen
23 avril, 2021 — Durée : 2h

Toutes les réponses devront être justifiées

Exercice 1 Démontrez ou réfutez les affirmations suivantes :

(1) Soit $\gamma(t) = (3+4sin(t), 7+3t, 2-4cos(t))$. Alors la longueur d'arc de $\gamma(t)$ entre $\gamma(0)$ et $\gamma(2\pi)$ est 8π.

(2) Soient S^2 paramétrée par $\varphi(u,v) = (cos(u)cos(v), cos(u)sin(v), sin(u))$ et $\mathcal{R} \subset S^2$ la partie entre les parallèles $u = \pi/4$ et $u = -\pi/4$. Alors $Aire(\mathcal{R}) = \sqrt{2}\pi$.

(3) Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ paramétrée par $\varphi(u,v) = (sin(u), v, cos(u))$. Alors l'image de S par l'application de Gauss est la longitude $\{(x,y,z) \in S^2 \mid y = 0\} \subset S^2$.

Exercice 2 Soit $\gamma(s) \subset \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée unitaire telle que $\gamma''(s) \neq \bar{0}\ \forall s$.

(1) Définissez le trièdre de Frenet $\{T(s), N(s), B(s)\}$ associé à $\gamma(s)$.

(2) Écrivez les formules de Frenet-Serret.

Pour les parties 3) et 4) on suppose que $\gamma(s)$ ait normale $N(s)$ qui vérifie
$N'(s) = (\kappa(s) - 1)T(s)\ \forall s$

(3) Trouvez la torsion $\tau(s)$ de $\gamma(s)$. La courbe $\gamma(s)$ est-elle une courbe plane ?

(4) Déduisez la nature de γ.

Exercice 3 Considérez la surface $S \subset \mathbb{R}^3$ paramétrée par $\varphi(u,v) = (u, v, \frac{u^2}{2} + \frac{v^3}{3})$.

(1) Calculez (avec soin !) les première et seconde formes fondamentales de φ.

(2) Déduire de (1) une formule pour la courbure de Gauss, K. Indiquez les points $\varphi(u,v)$ de S pour lesquels $K < 0$, $K = 0$, $K > 0$.

(3) La surface S est-elle minimale ? Le point $\varphi(1,-1)$ est-il ombilic ?