CSP

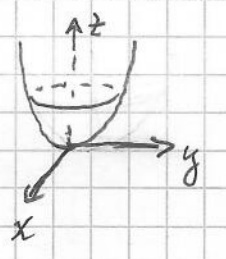
Cours 5 Surfaces dans $\mathbb{R}^3$

0) Introduction

On a vu (CDF, Cours 7) qu'une surface S dans $\mathbb{R}^3$ peut être décrite de trois façons :

i) Comme le graphe d'une fonction de deux variables

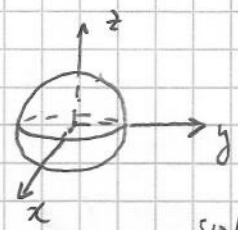
Exemple : $z = f(x,y) = x^2+y^2$



paraboloide

ii) Comme une surface de niveau

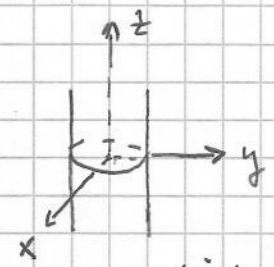
Exemple : $x^2+y^2+z^2 = 1$



sphère unité

iii) Comme une surface paramétrée

Exemple : $\varphi(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$



cylindre

Localement, ces trois façons sont équivalentes
(voir CDF, Cours 7 p.3 Théorème)

Dans ce cours (CSP), on considère principalement les surfaces paramétrées régulières.

① Définitions (voir aussi COF Cours 7)

i) $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface topologique si $\forall$ point $p \in S$, $\exists$ ouverts $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $p \in U \subset \mathbb{R}^3$ t.q. $\varphi : \Omega \to S \cap U$ est un homéomorphisme (= bijectif et bicontinue)

iii) $\varphi : \Omega \to S \cap U$ s'appelle une paramétrisation locale (Notez que S est munie de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^3$)

On considère les surfaces $S \subset \mathbb{R}^3$ dont les paramétrisations sont régulières :

iii) $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ est $\mathcal{C}^\infty$

iv) $\operatorname{rang}(d\varphi) = 2$ en tout point de Ω.

Remarque (concernant condition iv) :

On peut écrire $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ avec x, y, z les fonctions coordonnées de φ.
Alors la différentielle $d\varphi$ est donnée par sa matrice Jacobienne :

$$[d\varphi(u,v)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}_{|(u,v)}$$

Donc $\operatorname{rang}(d\varphi(u,v)) = 2 \Leftrightarrow$ les vecteur colonnes de $[d\varphi(u,v)]$ sont indépendants

$\Leftrightarrow$ le produit vectoriel $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \neq \vec{0}$

Alors si on note $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ par φ_u, φ_v (voir CDF Cours 2, p.9 pour les différentes notations), la condition iv) équivaut

iv') $\varphi_u \wedge \varphi_v \neq \vec{0}$ en tout point (u,v) de Ω.

(2) Exemples

1) Le graphe d'une fonction C^∞, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, est une surface paramétrée régulière. En effet,

$\varphi(u,v) = (u, v, f(u,v))$ est une paramétrisation régulière car φ est C^∞ et $d\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{pmatrix}$ est de rang 2.

Remarque : Lorsqu'il s'agit d'un graphe de fonction comme ci-dessus, on utilise plutôt la notation $\varphi(x,y) = (x, y, f(x,y))$.

1') La paraboloïde $f(x,y) = x^2 + y^2$

est paramétrisée par $\varphi(x,y) = (x, y, x^2+y^2)$

La selle à cheval $f(x,y) = x^2 - y^2$

est paramétrisé par $\varphi(x,y) = (x, y, x^2-y^2)$

2) Le cylindre $S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = 1\}$ est une surface (paramétrisée) régulière car :

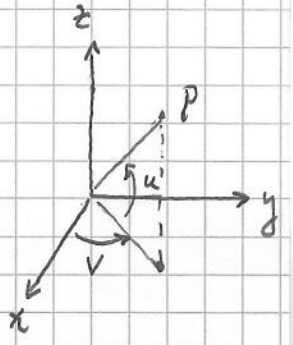
- $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(u,v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$ est C^∞, rang $d\varphi = 2$ avec $\mathrm{Im}\,\varphi = S$

- S est recouverte par deux paramétrisations locales :

$$\varphi : \Omega_i \to S \qquad \Omega_1 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u < 2\pi\}$$
$$\Omega_2 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < u < \pi\}$$

Définition : On appelle $\{(\varphi, \Omega_1), (\varphi, \Omega_2)\}$ un atlas (de paramétrisations locales).

3) La sphère unité $S^2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ est une surface régulière.

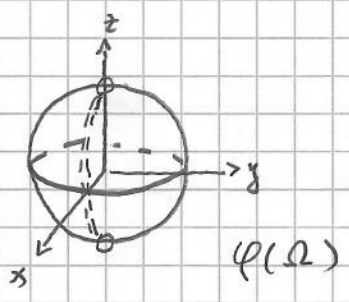


En effet, la paramétrisation la plus évidente est donnée par des latitudes (ou parallèles) u = constante et des longitudes (ou méridiens) v = constante.

$$\varphi(u,v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$$

Maintenant, S^2 est recouverte par les paramétrisations locales suivantes :

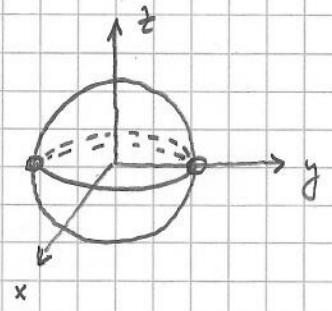
- La restriction de φ à l'ouvert $\Omega = \{(u,v) \mid -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, \ 0 < v < 2\pi\}$



$\varphi(\Omega)$

- On fait à $\varphi(\Omega)$ une rotation par π autour de l'axe O_z suivie d'une rotation par $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe O_x :

$$\tilde{\varphi}(u,v) = (-\cos u \cos v, -\sin u, -\cos u \sin v)$$



$\tilde{\varphi}(\Omega)$

Donc $\{(\varphi, \Omega), (\tilde{\varphi}, \Omega)\}$ est un atlas de paramétrisations locales pour la sphère unité

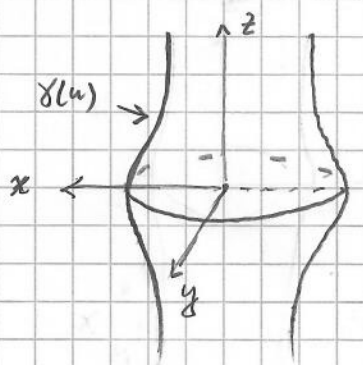
Remarque : On est souvent obligé d'utiliser plus d'une paramétrisation locale pour paramétriser une surface car φ doit être injective (par définition).

4) Surface de révolution

On appelle surface de révolution une surface obtenue en faisant tourner une courbe géométrique (que l'on suppose dans le plan xOz)

$$\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$$

autour de l'axe Oz :



$$\varphi(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$$

Vérifions les conditions nécessaires pour que φ soit régulière :

- f, g sont $\mathcal{C}^\infty$

- $\varphi_u = (f'(u)\cos v,\ f'(u)\sin v,\ g'(u))$

$\varphi_v = (-f(u)\sin v,\ f(u)\cos v,\ 0)$

$\Rightarrow \quad \varphi_u \wedge \varphi_v = (-fg'\cos v,\ -fg'\sin v,\ ff')$

$\Rightarrow \quad \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 = f^2(f'^2 + g'^2)$

Donc on doit avoir :

$f(u) \neq 0 \quad \forall u \qquad (\gamma$ n'intersect pas l'axe $O_z)$

$\|\gamma'(u)\|^2 = f'(u)^2 + g'(u)^2 \neq 0 \quad \forall u \qquad (\gamma$ doit être régulière$)$

d'où la surface est régulière avec un atlas de paramétrisations locales $\{(\varphi, \Omega_1), (\varphi, \Omega_2)\}$:

$\varphi : \Omega_i \to S$

$\varphi(u,v) = (f(u)\cos v,\ f(u)\sin v,\ g(u))$

$\Omega_1 = \{(u,v) \mid 0 < v < 2\pi\}$

$\Omega_2 = \{(u,v) \mid -\pi < v < \pi\}$

(4) Reparamétrisation

Comme on a fait pour les courbes, on peut reparamétriser les surfaces

Définition : Soient $\varphi : \Omega \to S$ une paramétrisation locale de $S \subset \mathbb{R}^3$ et $\phi : \tilde{\Omega} \to \Omega$ un difféomorphisme (C^∞). Alors $\tilde{\varphi} := \varphi \circ \phi : \tilde{\Omega} \to S$ est également une paramétrisation locale

(exercice) appelée une <u>reparamétrisation</u> de φ.

Exemple : $\phi(u,v) = (u+c_1, v+c_2)$, translation par (c_1, c_2), nous permet de supposer qu'un point $p \in S$ est l'image de $(u,v) = (0,0)$.

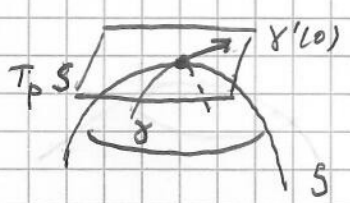
(5) Plan tangent, normale à S

Soient $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière, $p \in S$, $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to S$ une courbe C^∞ (mais pas nécessairement régulière) t.q. $\gamma(0) = p$. Alors $\gamma'(0)$ est le vecteur vitesse tangent à γ en p.

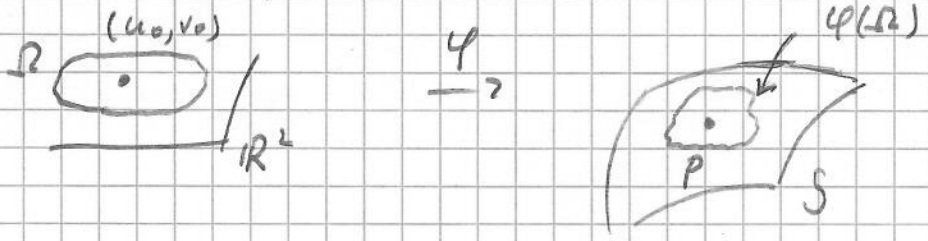
Définitions :

i) $\gamma'(0)$ est un vecteur tangent à S en p.

ii) Le plan tangent, T_pS, à S en p est l'ensemble des vecteurs tangents à S en p de toutes les courbes C^∞ sur S passant par p.

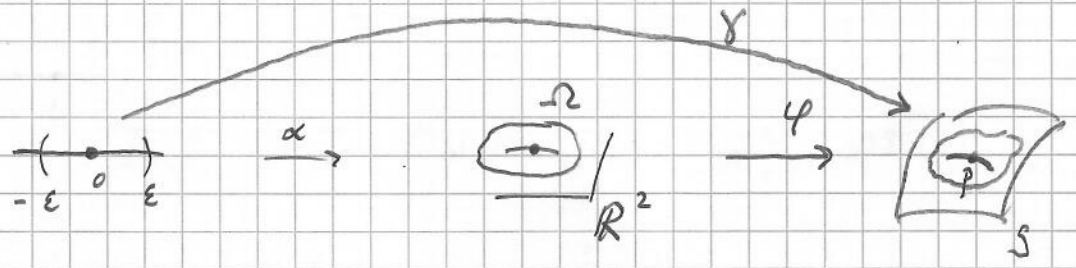


Maintenant, on considère une paramétrisation locale $\varphi : \Omega \to S$ t.q. $\varphi(u_0, v_0) = p \in S$.



Toute courbe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow S$ t.q. $\gamma(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset \varphi(\Omega)$ et $\gamma(0) = p$ comme ci-dessus peut s'écrire comme

$\varphi(u(t), v(t))$ (exercice) :



$$t \longmapsto \alpha(t) = (u(t), v(t)) \longrightarrow \varphi(\alpha(t)) \equiv \varphi(u(t), v(t)) = \gamma(t)$$

Proposition : Si $(u_0, v_0) \in \Omega$ t.q. $\varphi(u_0, v_0) = p \in S$, alors $T_p S$ est le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\varphi_u(u_0, v_0)$ et $\varphi_v(u_0, v_0)$ (qui sont linéairement indép. car $\varphi_u \wedge \varphi_v \neq \vec{0}$ par hypothèse)

Preuve : $\gamma(t) = \varphi(\alpha(t))$ d'où

$$\gamma'(0) = d\varphi(\alpha(0))\, \alpha'(0)$$
$$= \varphi_u(u_0, v_0)\, u'(0) + \varphi_v(u_0, v_0)\, v'(0)$$

donc $\gamma'(0)$ est une combinaison linéaire de $\varphi_u(u_0, v_0)$, $\varphi_v(u_0, v_0)$

Réciproquement, etant donné $h\, \varphi_u(u_0, v_0) + k\, \varphi_v(u_0, v_0)$ on pose

$$\gamma(t) = \varphi(u_0 + ht, v_0 + kt)$$

et alors

$$\gamma(0) = p \quad \text{et} \quad \gamma'(0) = h\, \varphi_u(u_0, v_0) + k\, \varphi_v(u_0, v_0)$$

#

Remarques :

1) Puisque $d\varphi(u_0,v_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ est donnée par

$$d\varphi(u_0,v_0) : (h,k) \longrightarrow h\,\varphi_u(u_0,v_0) + k\,\varphi_v(u_0,v_0)$$

on a que :

$$T_p S = \mathrm{Im}\left(d\varphi(u_0,v_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \right)$$

2) Ceci montre que $T_p S$ est indépendant du choix de paramétrisation contenant p.

Maintenant, on fait la

Définition : $N_\varphi = \dfrac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\| \varphi_u \wedge \varphi_v \|}$ est une normale à S en p

$N_\varphi(u_0,v_0)$ est :

- unitaire
- orthogonal à $\varphi_u(u_0,v_0)$ et $\varphi_v(u_0,v_0)$

donc $N_\varphi(u_0,v_0)$ est orthogonal à $T_p S$ (d'où le nom "normale" à S en p)

Exercice : Si $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \phi$ est une reparamétrisation de φ, alors

$$N_{\tilde{\varphi}} = \frac{\det \mathrm{Jac}(\phi)}{|\det \mathrm{Jac}(\phi)|} N_\varphi$$

Exemple : Soit $S = \{ (x, y, x^2+y^2) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$

Alors $\varphi(x,y) = (x, y, x^2+y^2)$ est une paramétrisation, et

$$d\varphi(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & 2y \end{bmatrix}_{(x_0,y_0)}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_x(x_0,y_0) = d\varphi(x_0,y_0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2x_0\end{pmatrix}$$

$$\varphi_y(x_0,y_0) = d\varphi(x_0,y_0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\2y_0\end{pmatrix}$$

Donc $T_p S = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2x_0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2y_0\end{pmatrix}\right\}$ $\qquad p = (x_0, y_0, x_0^2 + y_0^2)$

$$N_\varphi(x_0,y_0) = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\2x_0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\1\\2y_0\end{pmatrix}}_{\| \qquad \|} = \frac{1}{\sqrt{1+4x_0^2+4y_0^2}} \begin{pmatrix}-2x_0\\-2y_0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad T_p S = \left\{(x,y,z) \,/\, (x,y,z)\cdot\begin{pmatrix}-2x_0\\-2y_0\\1\end{pmatrix} = 0\right\}$$

$$= \boxed{-2x_0\,x - 2y_0\,y + z = 0}$$