CSP

Cours 1 : Courbes dans $\mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$

On considère $\mathbb{R}^n$ muni de produit scalaire, norme et métrique usuels : $x=(x_1,\dots,x_n)$ $y=(y_1,\dots,y_n)$

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}$$

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

(1) Courbes regulières

Définitions : 1) Une courbe paramétrée est une fonction continue

$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert

2) L'image $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ est la courbe géométrique, $\mathcal{C}$, associée. On dit aussi que γ est une paramétrisation de $\mathcal{C}$.

On suppose, en plus, que :

3) γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$: si $\gamma(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t))$, alors les fonctions coordonnées $x_i(t)$ sont $\mathcal{C}^\infty$

4) γ est régulière, c'est à dire $\gamma'(t) \neq \vec{0}$ $\forall t \in I$.

(On dit que $\gamma'(t)$ est le vecteur tangent à $\gamma(t)$)

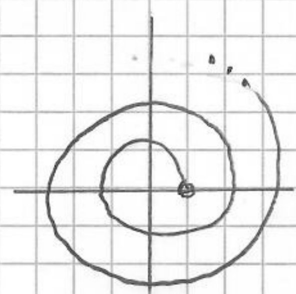
Exemples

1) $\gamma(t) = (t, t^2)$ $t \in]-\infty, \infty[$ est une paramétrisation de la parabole $y = x^2$

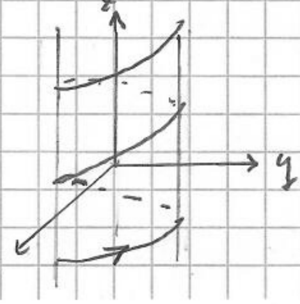
En effet $x(t) = t$ et $y(t) = t^2$ d'où $y = x^2$

2) $\left.\begin{array}{l} \gamma_1(t) = (\cos t, \sin t) \\ \gamma_2(t) = (-\sin t, \cos t) \end{array}\right\}$ sont deux courbes paramétrées distinctes ($\gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)$) ayant la même courbe géométrique associée : le cercle $x^2 + y^2 = 1$

3) $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, $t \in]0, \infty[$, paramétrise une spirale logarithmique :



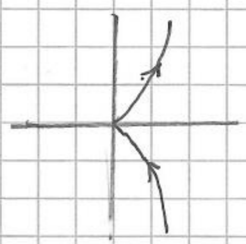
4) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ hélice circulaire



tracée sur le cylindre $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

Exemple de courbe paramétrée non-régulière :

5) $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ $\quad\quad$ $\gamma'(t) = (2t, 3t^2) \Rightarrow \gamma'(0) = (0,0)$



courbe $y^2 = x^3$

$\gamma(0)$ est un point de rebroussement de 1ère espèce (ou cusp)

(2) Changement de paramètre

On a vu (exemple 2 ci-dessus) qu'une même courbe géométrique peut avoir plusieurs paramétrisations

On peut reparamétrer une courbe :

Rappel : Une application $h : U \to V$ ($U, V \subset \mathbb{R}^n$ ouverts) est un difféomorphisme si :

- h est une bijection
- h et h^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Maintenant, soient $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée
$J \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert
$h : J \to I$ un difféomorphisme, $h' > 0$

Alors $\delta = \gamma \circ h : J \to \mathbb{R}^n$ est une reparamétrisation de γ par h

$$\begin{tikzcd} \underset{J}{\overset{s}{(\longleftrightarrow)}} \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend left, "\delta"] & \underset{I}{\overset{t}{(\longleftrightarrow)}} \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

- γ et δ donnent la même courbe géométrique

Exemple $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)$

$\gamma_2(t) = (-\sin t, \cos t)$

Alors $\gamma_2 = \gamma_1 \circ h$, $h(t) = t + \frac{\pi}{2}$

$\left(\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t \quad ; \quad \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t \right)$

3 Longueur d'un arc de courbe

Soient γ une courbe paramétrée avec $\mathcal{C}$ la courbe géométrique associée et $A = \gamma([a,b])$ un arc fermé de $\mathcal{C}$.

Définition : La longueur de l'arc A est $\int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$

Remarque : Puisque $\gamma(t)$ est $\mathcal{C}^\infty$ par hypothèse, la fonction $t \mapsto \|\gamma'(t)\|$ est continue d'où l'intégrale $\int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$ existe

Exemples

1) Si $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $A = \gamma([0,1])$, alors

$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ d'où $\|\gamma'(t)\|^2 = 2$ et longueur de $A = \int_0^1 \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}$.

(Il s'agit d'un arc de l'hélice circulaire de §1 Exemple 4)

2) Trouver la longueur d'arc de la courbe $\gamma(t) = (t, t^{3/2})$

$0 \leq t \leq 5$.

<u>Rép</u> : $\gamma'(t) = (1, \frac{3}{2} t^{1/2}) \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = (1 + \frac{9}{4} t)^{1/2}$

Donc Longueur $= \int_0^5 (1 + \frac{9}{4} t)^{1/2}\, dt$

$$= \frac{1}{2} \int_0^5 (4 + 9t)^{1/2}\, dt$$

$$= \frac{1}{9} \int_2^7 u^2\, du$$ (changement de variable $u = (4+9t)^{1/2}$)

$$= \frac{1}{9} \left.\frac{u^3}{3}\right|_2^7 = \frac{1}{27}(7^3 - 2^3) = \frac{335}{27}$$

3) $\gamma(t) = (t, t^2)$ $\quad 0 \leq t \leq 1$ $\quad$ Arc de parabole

Longueur $= \int_0^1 (1 + 4t^2)^{1/2}\, dt = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{5})\right)$

—

<u>Lemme 1</u> : La longueur d'arc A est invariante par reparamétrisation

<u>Preuve</u> : Si $h : [c, d] \to [a, b]$ $(h' > 0)$ donne une reparamétrisation, $\delta = \gamma \circ h$, de γ alors

$$\int_c^d \|\delta'(u)\|\, du = \int_c^d \|(\gamma \circ h)'(u)\|\, du$$

$$= \int_c^d \| \gamma'(h(u))\, h'(u) \| \, du$$ dérivée d'une fonction composée

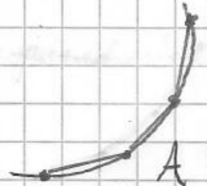
$$= \int_c^d \| \gamma'(h(u)) \| \, h'(u) \, du$$ car $h'(u) > 0$

$$= \int_a^b \| \gamma'(t) \| \, dt$$ changement de variable $t = h(u)$

#

Motivation pour la définition de la longueur d'arc

1.



On approxime l'arc A par des lignes polygonales inscrites

Pour δt petit, $A_t^{t+\delta t} = \gamma([t, t+\delta t])$,

Longueur de $A_t^{t+\delta t} \simeq \| \gamma(t+\delta t) - \gamma(t) \|$

$\simeq \| \gamma'(t) \| \, \delta t$ car $\dfrac{\gamma(t+\delta t) - \gamma(t)}{\delta t} \simeq \gamma'(t)$

Lorsque $\delta t \to 0$ le nombre de segments augment et la somme des longueurs des segments polygonaux tend vers $\int_a^b \| \gamma'(t) \| \, dt$

2. L'interprétation cinématique

$\gamma(t)$ représente la position d'un point dans $\mathbb{R}^n$ et la courbe géométrique associée $\mathcal{C}$ donne sa trajectoire.

Alors

- $\dfrac{\gamma(t_2)-\gamma(t_1)}{t_2-t_1}$ $(t_2 > t_1)$ est le vecteur vitesse moyenne

  entre les temps t_1 et t_2

- $\gamma'(t)$ est le vecteur vitesse instantanée en t

- $\|\gamma'(t)\|$ est la vitesse instantanée en t

Donc

$\int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(t)\|\, dt$ représente la distance parcourue entre

les temps t_1 et t_2

(4) Longueur d'arc et paramétrisation unitaire

On a vu (§3, Lemme 1) que la longueur d'arc est invariante par reparamétrisation. Cependant la vitesse n'est pas :

Exemple : Le cercle unité $\mathcal{C}$: $\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\} \subset \mathbb{R}^2$ est paramétrée par

$$\gamma_n(t) = (\cos(nt), \sin(nt)) \qquad 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{n} \qquad n \geq 1$$

$$\text{Longueur de } \mathcal{C} = \int_0^{2\pi/n} \|\gamma'(t)\|\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi/n} n\, dt = 2\pi \quad (\text{circumference})$$

Mais $\quad \|\gamma_n'(t)\| = n$

Etant donné une courbe paramétrée $\gamma(t)$, il sera utile pour la suite d'avoir une reparamétrisation $\gamma(s)$ t.q. $\|\gamma'(s)\| = 1 \quad \forall s$

Rappelons que $\gamma(t)$ est regulière : $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t$

<u>Définition</u> :

1) $T(t) = \dfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ est le vecteur <u>tangent</u> <u>unitaire</u> à γ en t

2. Si $\|\gamma'(t)\| = 1 \quad \forall t$ on dit que $\gamma(t)$ est une paramétrisation <u>unitaire</u> (ou <u>normale</u>)
et on la note $\gamma(s)$ (paramètre noté s)

<u>Exemples</u>

1) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ paramétrise le cercle unité
$\|\gamma'(t)\| = 1$ d'où une paramétrisation unitaire

2) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ paramétrise un arc de l'hélice circulaire
$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}$ donc <u>pas</u> une paramétrisation unitaire

Mais

$$\gamma(s) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \qquad 0 \leq s \leq 2\sqrt{2}\,\pi$$

$\|\gamma'(s)\| = 1$ d'où une paramétrisation unitaire

⚠ <u>Remarque</u> : Si $\gamma(s)$ une paramétrisation unitaire, $A = \gamma([a,b])$, alors Longueur $A = \int_a^b \|\gamma'(s)\|\, ds = b-a$.

En général Longueur$(\gamma([s_1, s_2])) = s_2 - s_1$

Théo<u>rème</u> 1 : $\gamma(t)$ (régulière) admet une reparamétrisation unitaire.

<u>Preuve</u> : i) Fixons t_0. Alors on a vu (§3) que la fonction

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\|\, du$$

donne la longueur d'arc de γ entre t_0 et t $\quad (t > t_0)$.

ii) D'après le théorème fondamental de l'analyse,

$$s'(t) = \|\gamma'(t)\|$$

d'où $s'(t) > 0$ car $\|\gamma'(t)\| > 0$ $\quad$ ($\gamma'(t)$ régulière)

Donc $s(t)$ est un difféomorphisme dont on note l'inverse par $t(s)$.

$$\underset{t_0 \qquad t_1}{[\overset{t}{\text{———}}]} \;\underset{t(s)}{\overset{s(t)}{\rightleftarrows}}\; \underset{0 \qquad \ell}{[\overset{s}{\text{———}}]}$$

Alors $t'(s) = \dfrac{1}{s'(t)} = \dfrac{1}{\|\gamma'(t)\|}$ $\quad (*)$

d'où $\delta(s) = \gamma(t(s))$ est unitaire car

$$\frac{d\delta}{ds} = \frac{d\gamma}{dt}\frac{dt}{ds}$$

$$\left\|\frac{d\delta}{ds}\right\| = \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| \left\|\frac{dt}{ds}\right\| \overset{(*)}{=} \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| \Big/ \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| = 1$$

#

Remarques :

1) $\gamma(t)$ admet une reparamétrisation unitaire ssi $\gamma(t)$ est regulière

2) On appelle $s(t)$ l'abscisse curviligne ou parfois la fonction longueur d'arc

3) On appelle $\delta(s) = \gamma(t(s))$ défini ci-dessus la paramétrisation par abscisse curviligne ou par longueur d'arc

Exemple :

$$\left.\begin{aligned} \gamma(t) &= (\cos t, \sin t, t) \\ \delta(s) &= \left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}\right\} \text{voir Exemple 2 ci-dessus}$$

On considère l'abscisse curviligne

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\|\, du$$

$$= \int_0^t \sqrt{2}\, du = \sqrt{2}\, t$$

Donc $s(t) = \sqrt{2}\, t$ d'où $t(s) = \frac{s}{\sqrt{2}}$ et

$$\delta(s) = \gamma(t(s)) = \left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$