UNIVERSITÉ DE RENNES 1 ueb

Algèbre générale de base

TD

Feuille d'exercices 9

Exercice 1

Soit $B \in M_3(\mathbb{Z})$ la matrice suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Mettez B sous forme normale de Smith, B'.

2. Soit M le $\mathbb{Z}$-module engendré par x_1, x_2, x_3 avec relations $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$; $2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0$; $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$. Donnez la matrice de présentation de M, et mettez M sous forme $\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^r$ t.q. $r \geqslant 0$, $d_1 > 1$ et $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_n$. (Les d_i sont les facteurs invariants de M).

Exercice 2

Explicitez les groupes abeliens donnés par les matrices de présentation suivantes :

i) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3

Donnez une base de $\mathbb{Z}^3$ adaptée au sous-module engendré par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

Soient A un anneau commutatif intègre et M un A-module. On dit que $x \in M$ est *de torsion* s'il existe $a \in A$, $a \neq 0$, tel que $ax = 0$. On note M_{tor} le sous-A-module des éléments de torsion de M. On dit que M est *de torsion* si $M = M_{\text{tor}}$.

1. Un exemple avec $A = \mathbb{Z}$: on note $M = S^1$ le cercle unité vu comme l'ensemble des nombres complexes de module 1, muni de la multiplication comme loi de groupe. Construisez un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} S^1$ puis identifiez M_{tor} de part et d'autre de l'isomorphisme.

2. On suppose M de type fini et on pose $Ann(M) = \{a \in A; aM = 0\}$. Montrez que M est de torsion si et seulement si $Ann(M) \neq \{0\}$.

3. Donnez un exemple d'un module de torsion qui n'est pas de type fini et pour lequel $Ann(M) = \{0\}$.

Exercice 5

Soit A un anneau commutatif. Soit $p : M \to N$ un morphisme entre deux A-modules.

1. Soit $s : N \to M$ un morphisme tel que $p \circ s = id_N$. Trouver un A-module K tel que la somme directe $N \oplus K$ est isomorphe à M.

2. Soient N libre et p surjectif. Montrer qu'il existe un A-module K tel que $N \oplus K \simeq M$.