Algèbre générale de base

TD

Feuille d'exercices 8

Exercice 1

$\mathbb{Q}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$-module libre

Soit $\{e_i\}_{i\in I}$ une famille d'éléments du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}$. Montrez que si $\mathrm{card}(I) \leq 1$, cette famille n'est pas génératrice. Montrez que si $\mathrm{card}(I) \geq 2$, elle n'est pas libre. Déduisez que $\mathbb{Q}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$-module libre.

Exercice 2

Soit $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Montrez que les A-modules $2A$ et $3A$ ne sont pas libres, mais que $2A \oplus 3A$ est libre de rang 1.

Exercice 3

Soit M un A-module et $S \subset M$ une partie. On appelle S *une partie génératrice* de M si le sous-module de M engendré par S est M.

1. Montrez que tout A-module admet une partie génératrice. En déduire que tout A-module est isomorphe à un quotient d'un A-module de type $A^{(I)}$.

2. Soit M un A-module. On appelle *présentation par générateurs et relations* de M la donnée d'une famille de générateurs $\{x_i\}_{i\in I}$ de M et d'une famille de générateurs $\{r_j\}_{j\in J}$ du noyau du morphisme $A^{(I)} \to M$, $e_i \mapsto x_i$. Pour $A = \mathbb{Z}[X]$, donnez une présentation par générateurs et relations du A-module $< 2, X > \subset A$.

Exercice 4

On rappelle qu'un A-module M est dit *de type fini* s'il admet une partie génératrice finie.

1. Montrez que tout quotient d'un A-module de type fini est de type fini.

2. Montrez qu'un A-module M est de type fini si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que M soit isomorphe à un quotient de A^n.

3. Soient M un A-module et N un sous-module de M. Montrez que si N et M/N sont de type fini, alors M est de type fini.

Exercice 5

Soit A l'anneau $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Montrez que $M := A$ est un A-module de type fini et que le sous-ensemble $N := \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ est un sous-A-module qui n'est pas de type fini.

Exercice 6

Soient $m, n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer $\mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, $\mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, $\mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ et $\mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.
2. Montrer qu'il n'existe aucune application $\mathbb{Z}$-linéaire non nulle de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3. Existe-t-il des applications $\mathbb{Z}$-linéaires non nulles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Q}$?

Exercice 7

Soit $B \in M_3(\mathbb{Z})$ la matrice suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -6 & 6 & 12 \\ 10 & -4 & -16 \end{pmatrix}.$$

Mettez B sous forme normale de Smith, B'.

Exercice 8

Mettez les $\mathbb{Z}$-modules suivants sous forme $M = \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$ t.q. $d_1 > 1$ et $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_n$.

1. $M = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$
2. $M = \mathbb{Z}/490\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/28\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/147\mathbb{Z}$