UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre générale de base

TD

Feuille d'exercices 6

Exercice 1

Démontrez que $P(X) = X^4 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{F}_5[X]$.

Exercice 2

1. Le polynôme $P(X) = 3X^4 + 15X^2 + 10$ est-il irréductible sur $\mathbb{Q}$? Sur $\mathbb{Z}$?
2. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. Soit $a \in \mathbb{Z}$, supposons que $Q(X) := P(X+a)$ soit irréductible sur $\mathbb{Q}$. Montrez que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
3. Soit p un nombre premier. Montrez que le polynôme cyclotomique

$$\Phi_p(X) = \frac{X^p - 1}{X - 1} = X^{p-1} + ... + X + 1,$$

est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 3

1. L'idéal engendré par $f(x) = \frac{1}{9}x^3 + \frac{5}{3}x^2 + x + \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}[x]$ est-il un idéal maximal de $\mathbb{Q}[x]$?
2. L'anneau quotient $\mathbb{Q}[x]/ < 6x^6 - 14x^4 + 42x^2 - 105 >$ est-il un corps ?
3. L'élément $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 1$ est-il un élément premier dans $\mathbb{Q}[x]$?

Exercice 4

1. Trouver le polynôme minimal de $\sqrt[5]{3} \in \mathbb{R}$ sur $\mathbb{Q}$ et déterminer le degré de $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{3})$ sur $\mathbb{Q}$.
2. Montrer que $[\mathbb{Q}(i, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 4$ et calculer le polynôme minimal de $2i - \sqrt{5}$ sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 5

On considère le polynôme $P(X) = X^4 + 1$.

1. Montrez que $P(X)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
2. Montrez que $P(X) = \Phi_8$.
3. On souhaite montrer que $X^4 + 1$ est *réductible* sur $\mathbb{F}_p$ pour tout premier p.
   i) Commencez par donner une factorisation de $P(X)$ sur $\mathbb{F}_2$
   ii) Montrez que pour tout $p \neq 2$, $\mathbb{F}_{p^2}^\times$ contient un élément d'ordre 8.
   iii) Conclure que $P(X)$ n'est pas irréductible sur $\mathbb{F}_p$. (*Voir TD4 Exercice 7*).
4. Décomposez $P(X)$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{F}_7[X]$.