

Feuille d'exercices 5

Exercice 1

Soit $P(X) = X^3 + 2X + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$. On pose $L = \mathbb{F}_3[X]/\langle P(X) \rangle$, et α la classe de X dans L .

1. Montrez que L est un corps. Quelle est sa caractéristique ? son cardinal ? Donnez une base de L comme \mathbb{F}_3 -espace vectoriel.
2. Quels sont les ordres possibles pour les éléments de $L^\times \setminus \mathbb{F}_3^\times$? Montrez que α est un générateur de L^\times .

Exercice 2

Soient $P(X) = X^2 + 1$ et $Q(X) = X^2 + X + 2$ polynômes dans $\mathbb{F}_3[X]$.

1. Montrez que $P(X)$ et $Q(X)$ sont irréductibles dans $\mathbb{F}_3[X]$.
2. Explicitez un isomorphisme entre $\mathbb{F}_3[X]/\langle P(X) \rangle$ et $\mathbb{F}_3[X]/\langle Q(X) \rangle$.

Exercice 3

Trouvez un générateur de \mathbb{F}_{31}^\times .

Exercice 4

Montrez que le polynôme $X^2 + 1$ est irréductible sur \mathbb{F}_p lorsque p est congru à 3 modulo 4.

Exercice 5

Montrez que l'idéal $I = \langle X^2 + 1, 5 \rangle$ dans $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas maximal.

Exercice 6

Énumérez les sous-corps de \mathbb{F}_{243} ainsi que ceux de \mathbb{F}_{729} .