Algèbre générale de base

TD

Feuille d'exercices 3

Exercice 1

Soient A un anneau commutatif.

1. Soient I, J des idéaux de A tels que $I \subset J$. On note J/I l'idéal image de J dans l'anneau quotient A/I. Montrez que les anneaux $(A/I)/(J/I)$ et A/J sont isomorphes.

2. Soient x, y deux éléments de A. Montrez qu'il existe des isomorphismes entre : l'anneau quotient $A/ < x, y >$; l'anneau quotient de $A/ < x >$ par l'idéal engendré par $\overline{y}$; l'anneau quotient de $A/ < y >$ par l'idéal engendré par $\overline{x}$.

3. Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \in \mathbb{C}; a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ l'anneau des *entiers de Gauss*. Montrez l'égalité entre les deux l'idéaux suivants : $< 3 + 2i >=< 13, 5 - i >$. Déduire que $\mathbb{Z}[i]/ < 3 + 2i >\cong \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

Exercice 2

On considère les anneaux factoriels $\mathbb{Z}[X], \mathbb{Q}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

1. Écrivez l'élément $3X^3 + 3X$ comme un produit d'irréductibles dans $\mathbb{Z}[X]$.

2. Même question pour $3X^3 + 3X$ comme élément de $\mathbb{Q}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$.

3. L'anneau quotient $\mathbb{Z}[X]/ < 3X^2 + 3 >$, est-il intègre ?

Exercice 3

Considérons l'anneau $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ muni de la norme $N(a + b\sqrt{-5}) = (a + b\sqrt{-5})\overline{(a + b\sqrt{-5})} = a^2 + 5b^2$. Notez que $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$.

1. Montrez que les unités de A sont $\{1, -1\}$.

2. Montrez que si $N(\alpha)$ est irréductible dans $\mathbb{N}$, alors α est irréductible dans A.

3. Montrez que les éléments 3 et $2 + \sqrt{-5}$ sont irréductibles dans A. Déduire que A n'est pas factoriel.

Exercice 4

On se propose de démontrer le théorème d'Euler : si $n > 1$ et $(a, n) = 1$, alors

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \,(mod\, n).$$

1. Montrez que a est inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ssi $(a, n) = 1$.
2. Rappelez la définition de la fonction indicatrice d'Euler $\varphi(n)$.
3. Conclure, et déduire comme corollaire le théorème de Fermat.

Exercice 5

Critère de Fermat, nombres de Carmichael.

1. Si $a \in [1, n-1]$ et $(a, n) \neq 1$, montrez que a est témoin de Fermat pour la non-primalité de n.
2. Soit n un nombre sans facteurs carrés, tel que pour tout diviseur premier p de n, $p-1$ divise $n-1$. Montrez que n est soit premier, soit de Carmichael.
3. Montrez que 561 et 1105 sont de Carmichael.

Exercice 6

Soit n un nombre de Carmichael. En particulier n est sans facteurs carrés, produit d'au moins 2 premiers (en réalité, on peut montrer qu'il est produit d'au moins 3 premiers), et impair. On écrit $n - 1 = 2^s t$, où t est impair et $s \geqslant 1$. Pour $i \in \{0, .., s\}$, définissons

$$h_i : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times,$$

$$x \mapsto x^{2^i t}.$$

On pose enfin $K_i = Ker(h_i), I_i = Im(h_i)$. Soit $j < s$ le plus grand indice tel que $K_j \neq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. À l'aide du théorème chinois, montrez que si $-1 \in I_j$, alors $card(I_j) \geq 4$.