UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre générale de base

TD

Feuille d'exercices 2

Exercice 1

On propose une preuve analytique du théorème d'Euclide. Supposons que l'ensemble des nombres premiers est fini,

$$\mathcal{P} = \{p_1, ..., p_k\},$$

et posons

$$X = \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1}.$$

1. Pour p premier, et $m \geqslant 1$, montrez que

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \geqslant 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + .. + \frac{1}{p^m}.$$

2. En déduire que

$$X \geqslant \sum_{n \in N(m)} \frac{1}{n},$$

où $N(m)$ désigne les entiers dont la décomposition en facteurs premiers $n = p_1^{e_1} ... p_k^{e_k}$ vérifie $e_i \leqslant m$ pour tout i.

3. En conclure une absurdité.

Exercice 2

On propose une preuve, cette fois de dénombrement, du théorème d'Euclide. Supposons que l'ensemble des nombres premiers est fini,

$$\mathcal{P} = \{p_1, ..., p_k\},$$

1. Montrez que tout entier $n \geqslant 1$ s'écrit de manière unique

$$n = bc^2,$$

où b est sans facteur carré.

2. Montrez que le segment entier $[1, N]$ contient au plus $2^k\sqrt{N}$ nombres entiers.
3. Conclure

Exercice 3

Le but de cet exercice est de montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers congrus a -1 modulo 4. On procède par l'absurde et supposons le contraire, en notant $\{p_1, ..., p_m\}$ les premiers congrus à -1 modulo 4. On pose

$$n = 4p_1...p_m - 1,$$

1. Montrez que tout facteur premier p de n est congru à 1 modulo 4.
2. Obtenir une contradiction.

Exercice 4

Montrez qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 5 modulo 6.

Exercice 5

1. Soit A un anneau intègre, $p \in A$. Montrez que p premier $\Rightarrow p$ irréductible.

2. Soit A un anneau factoriel, $p \in A$. Montrez que p irréductible $\Rightarrow p$ premier.

Exercice 6

Soit A un anneau principal, $x \in A$ un élément non nul. Montrez que l'idéal $I =< x >$ est maximal ssi x est irréductible.

Exercice 7

Soit A un anneau. Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes :

(i). Chaque suite croissante d'idéaux dans A est stationnaire : pour $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$, il existe $N > 0$ tel que $I_N = I_{N+1} = \cdots$

(ii). Chaque idéal $I \subset A$ est de type fini : $I =< r_1, \cdots, r_n >$ pour un nombre fini de d'éléments $r_i \in A$.

Un anneau qui verifie ces conditions est appelé **noethérien**.